# 李代数及其表示理论导引

〔美〕J. E. 汉弗莱斯 著

上海科学技术出版社

# 李代数及其表示理论导引

〔美〕 J. E. 汉弗莱斯 著
陈志杰 译 曹锡华 校

上海科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书介绍了特征数0的代数闭域上的半单纯李代数理论，尤其着重于表示理论。作者利用最新的成果处理了李代数的经典理论（包括半单纯李代数的分类定理、同构定理与存在定理）；用初等的李代数方法证明Cartan子代数的共轭定理；用公理化方法处理根系及权的理论。着重介绍了半单纯李代数的表示理论。在最后一章介绍了Chevalley群的基本知识。本书为美国《研究生数学教材》丛书之一，写得简明扼要，深入浅出，便于阅读。读者只要对线性代数有足够的知识（如特征值、双线性型、欧氏空间及向量空间的张量积等），并对抽象代数的方法有所了解，即可阅读本书的前面几章。本书适合于大学高年级学生以及研究生参考或用作教材，也可供需要应用李代数的读者阅读。

INTRODUCTION TO
LIE ALGEBRAS AND
REPRESENTATION THEORY
J. E. Humphreys
Second Printing, Revised
Springer-Verlag,
New York. Heidelberg. Berlin-1972

李代数及其表示理论导引
〔美〕 J. E. 汉弗莱斯 著
陈志杰 译 曹锡华 校
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷
开本850×1156 1/32 印张7.25 字数201,000
1981年8月第1版 1981年8月第1次印刷
印数 1—6,500

书号：13119·815 定价：0.92元

# 原 序

本书的意图是向读者介绍特征数为0的代数闭域上的半单纯李代数理论，尤其着重于表示理论。我们假定读者对线性代数（包括特征值，双线性型，欧氏空间以及向量空间的张量积）已有足够的知识，并对抽象代数的方法有所了解. 本书的前四章大学优等生就能阅读，但阅读其余三章需有稍高的要求.

半单纯李代数的理论不仅在数学与物理的很多分支中有用，而且还有它内在的魅力，这是因为在它的基本结果中，把深度与完备性令人满意地结合起来了. 自从 Jacobson 的书在十年前问世以来，即使在这一理论的经典部分里，也已有了不少改进。我力图把其中的某些改进吸收入本书，并试图使非专门家较易接触本书的主题. 对于专家来说，还要特别指出以下几点：

(1) 强调了线性变换的 Jordan–Chevalley 分解，在半单纯的情形，用"环面"子代数代替传统的 Cartan 子代数.

(2) Jordan 子代数共轭定理的证明使用了初等的李代数方法（据 D. J. Winter 和 G. D. Mostow），避免使用代数几何.

(3) 同构定理先用初等方法证明（定理 14.2），以后它又作为 Serre 定理（18.3）的推论再次被得到，并且给出了用生成元与关系式的表示.

(4) 从一开始，就在正文与练习中着重突出了型 A, B, C, D 的单纯李代数.

(5) 用公理化方法处理根系（第三章）以及权 (weights) 理论的一部分.

(6) 在 § 23 与 § 24 里采用抽象方法引入 Weyl 特征标公式，它以 Harish–Chandra 的"特征标"理论为基础，且独立于 Freudenthal 的重数公式 (22.3). 这是受到了 D.–N. Verma 的论文以及

I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand 的近期工作的启发.

(7) 第七章内主要根据 R. Steinberg 的讲演记录给出了 Chevalley 群理论的基本梗概.

我不得不略去很多标准的论题（我感到其中极大部分最好作为第二阶段的课程），譬如说：上同调，Levi 和 Mal'cev 定理，Ado 和 Iwasawa 定理，在非代数闭域上的分类，素特征数的李代数等. 我希望读者将会从参考文献内所列举的书与文章，尤其是从 Jacobson[1]，Bourbaki[1]，[2]，Winter [1]，Seligman [1]中，继续钻研这些论题.

再说几句有关编排技巧的话：本书使用的术语绝大多数是传统的，而且把使用的符号减少到最低限度，以便利读者前后翻阅参看. 在看完第一到第三章后，如果读者想要进一步参看什么内容，那么剩下的几章可按任意的次序被阅读（只有两个例外：第七章依赖于 § 20 与 § 21，第六章依赖于 § 17）. 文中提到的定理 14.2 就是指 14.2 小节里的定理. 在各章节后面的附注指明了文中某些内容的出处以及进一步阅读的材料，但我并不想给出每个定理的历史沿革（关于历史的评述，可参见 Bourbaki[2]，Freudenthal-de Vries[1]）. 参考文献表主要包含那些已被提及的文献，若要更进一步查看的话，可见 Jacobson[1]，Seligman[1]. 书中给出了难易程度不同的 240 个练习，其中一些较容易的是正文中要用到的。

本书来源于我 1968 年在 Bowdoin 学院举行的国家科学基金会关于代数群的高级科学讨论班上的讲演，当时我的意图是想扩充 J.-P. Serre 的精彩但又未完成的讲演记录[2]. 本书写作时参照过的其它材料有：N. Bourbaki，N. Jacobson，R. Steinberg，D. J. Winter 以及其他人的书籍及讲演记录. 作者在此对自己的老师 George Seligman 和 Nathan Jacobson 谨表示感谢，是他们激发了我对李代数的兴趣. 我还要感谢 David J. Winter，他让我看了他即将出版的书；感谢 Robert L. Wilson，他对原稿提出不少有益的批评意见；感谢 Connie Engel，她帮助我准备了定稿；

以及感谢 Michael J. DeRise 在精神上对我的支持. 还有柯朗(Courant)数学科学研究所及国家科学基金会的财务上的支持也是值得感谢的。

J. E. 汉弗莱斯

1972年4月4日于纽约

# 第二次印刷的前言

除了改正一些小错和改进某些论证外，我还借此机会在§24后加了一个附录，在这个附录里用更简便的方法导出 Weyl 公式(避免使用§23). 对那些曾指出过错误以及提出过有用建议的人，我在此表示感谢，尤其是：J. Carr, J. Dorfmeister, M. Eichler, M. Elmer, K. W. Gruenberg, J. H. Lindsey, B. Weisfeiler, R. L. Wilson.

# 记号与约定

**Z**, **Z**$^+$, **Q**, **R**, **C** 分别表示整数, 非负整数, 有理数, 实数和复数的集合

⊔ 表示向量空间的直和

$A \rtimes B$ 表示群 $A$ 与 $B$ 的半直积, $B$ 正规

Card = (集合的)基数

char = 特征数

det = 行列式

dim = 维数

Ker = 核

Im = 像集

Tr = 迹

# 目　录

# 第一章 基本概念

在本章内 F 表示一个任意(交换)域.

## 1. 定义及初步的例子

### 1.1. 李代数的概念

李代数起源于由线性变换构成的向量空间，并且这个空间被赋予一个通常既不交换又不结合的新运算：$[x, y]=xy-yx$（右边的运算是通常的线性变换乘法）．也可以用一些公理抽象地描述这一类代数系．

**定义** 在域 F 上的一个向量空间 $L$ 里，有一个运算 $L\times L\to L$，记为 $(x, y)\mapsto[xy]$，如果以下公理 $(L1)\sim(L3)$ 被满足，则这个运算称为 $x$ 和 $y$ 的**方括号**或**换位子**（亦称李乘运算），且称 $L$ 为 F 上 **Lie代数**：

$(L1)$ 方括号运算是双线性的．

$(L2)$ $[xx]=0$ 对 $L$ 内所有的 $x$．

$(L3)$ $[x[yz]]+[y[zx]]+[z[xy]]=0 \quad (x, y, z\in L)$．

公理 $(L3)$ 称为 **Jacobi 等式**．如果把 $(L1)$ 和 $(L2)$ 应用于 $[x+y, x+y]$，即可得到反交换性：$(L2')$ $[xy]=-[yx]$．（反之，若 $\operatorname{char}F\neq 2$，则显然 $(L2')$ 意味着 $(L2)$．）

如果存在向量空间的同构 $\phi: L\to L'$，它对 $L$ 内所有 $x, y$ 都满足 $\phi([xy])=[\phi(x)\phi(y)]$，则称 F 上两个李代数 $L$ 和 $L'$ 是**同构的**（且称 $\phi$ 为李代数的**同构**）．显然，可类似地定义 $L$ 的（李）子代数：若 $K$ 是 $L$ 的子空间，并且只要 $x, y\in K$，即有 $[xy]\in K$，则称 $K$ 为 $L$ 的子代数．特别，$K$ 关于它的内在运算本身就是一个李代数．请注意，任一个非零元素 $x\in L$ 可定义一个一维子代数

$\mathsf{F}x$, 这是因为由 ($L2$), 乘法是平凡的.

本书中所涉及的李代数 $L$ 的底向量空间几乎全是在 $\mathsf{F}$ 上有限维的. 因此如果不特别指出, 就总是认为有上述的假设. 当然, 也要指出, $\mathsf{F}$ 上的某些无限维向量空间与结合代数将在表示论的研究中起重要的作用(第五～第七章). 在观察某些具体例子之前, 也要提一下, 如果 $L$ 仅仅被假设为一个交换环上的模, 上述李代数的公理也是完全有意义的, 不过我们不打算按照这一观点展开讨论.

## 1.2. 线性李代数

如果 $V$ 是 $\mathsf{F}$ 上有限维向量空间, 用 $\operatorname{End} V$ 表示 $V\to V$ 线性变换的集合. 作为 $\mathsf{F}$ 上的向量空间, $\operatorname{End} V$ 具有维数 $n^2$ ($n=\dim V$), 且 $\operatorname{End} V$ 关于通常的乘积运算是一个环. 我们定义一个新运算 $[x, y]=xy-yx$, 称为 $x$ 和 $y$ 的方括号. 带着这一运算, $\operatorname{End} V$ 成为 $\mathsf{F}$ 上李代数: 公理 ($L1$) 和 ($L2$) 立即可知, 而 ($L3$) 需要简短的计算(请读者自己验证). 为将这一新的代数结构与原来的结合代数区分, 我们用 $\mathfrak{gl}(V)$ 代替 $\operatorname{End} V$, 意指把它看作李代数, 且称之为**一般线性李代数**(因为它与 $V$ 的所有可逆自同态组成的**一般线性群** $GL(V)$ 密切相关). 当 $V$ 是有限维时, 我们将不加注解地使用记号 $\mathfrak{gl}(V)$.

李代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的任一子代数称为**线性李代数**. 有些读者感到矩阵比线性变换更为适宜, 因此宁可取定 $V$ 的一组基, 将 $\mathfrak{gl}(V)$ 与 $\mathsf{F}$ 上所有 $n\times n$ 矩阵的集合等同起来, 并记为 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$. 这一做法不但无妨, 反而能方便计算. 为了参照起见, 我们写下 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 关于由矩阵 $e_{ij}$ (在 $(i, j)$ 位置上是 1, 其余为 0) 所组成的标准基的乘法表. 因为 $e_{ij}e_{kl}=\delta_{jk}e_{il}$, 所以

$$[e_{ij}, e_{kl}]=\delta_{jk}e_{il}-\delta_{li}e_{kj}. \qquad (*)$$

请注意, 系数全是 $\pm 1$ 或 0, 因此都在 $\mathsf{F}$ 的素子域里.

现在看一些进一步的例子, 这些例子是本书中将要阐述的理论的中心. 它们分成四个族: $\mathsf{A}_l$, $\mathsf{B}_l$, $\mathsf{C}_l$, $\mathsf{D}_l$ ($l\geq 1$), 且被称为典型

李代数(因为对应于某些典型线性李群).

$A_l$: 设 $\dim V=l+1$. 将 $V$ 中迹为 0 的同态的集合记为 $\mathfrak{sl}(V)$ 或 $\mathfrak{sl}(l+1, \mathrm{F})$. (复习一下: 矩阵的迹是对角元素之和, 因它与 $V$ 内基的选取无关, 故对 $V$ 的自同态有意义.) 由于 $Tr(xy)=Tr(yx)$ 以及 $Tr(x+y)=Tr(x)+Tr(y)$, 故 $\mathfrak{sl}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, 又因它与行列式等于 1 的自同态所成的**特殊线性群** $SL(V)$ 有联系, 因此被称为**特殊线性李代数**. 它的维数是多少呢? 一方面, $\mathfrak{sl}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的真子代数, 所以它的维数至多为 $(l+1)^2-1$. 另一方面, 我们可以列举出这么多个迹为 0 的线性无关矩阵: 取所有的 $e_{ij}(i\neq j)$ 以及所有的 $h_i=e_{ii}-e_{i+1,i+1}(1\leqslant i\leqslant l)$, 总共有 $l+(l+1)^2-(l+1)$ 个矩阵. 我们总是把它们看作 $\mathfrak{sl}(l+1, \mathrm{F})$ 的标准基.

$C_l$: 设 $\dim V=2l$, 基 $(v_1, \cdots, v_{2l})$. 在 $V$ 上用矩阵

$$s=\begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$$

定义一个非退化斜对称型 $f$. (可以证明, 存在满足 $f(v, w)=-f(w, v)$ 的非退化双线性型的必要条件是维数为偶数.) 被记为 $\mathfrak{sp}(V)$ 或 $\mathfrak{sp}(2l, \mathrm{F})$ 的**辛代数**就是由满足 $f(x(v), w)=-f(v, x(w))$ 的 $V$ 的所有自同态所组成的. 读者很易验证, $\mathfrak{sp}(V)$ 在方括号运算下是封闭的. $x=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ $(m, n, p, q\in\mathfrak{gl}(l, \mathrm{F}))$ 是辛矩阵的条件, 用矩阵术语表达, 就是 $sx=-x^t s$ ($x^t=x$ 的转置) 即 $n^t=n$, $p^t=p$ 以及 $m^t=-q$. (最后一个条件迫使 $Tr(x)=0$.) 现在很易计算 $\mathfrak{sp}(2l, \mathrm{F})$ 的一个基. 取对角阵 $e_{ii}-e_{l+i,l+i}(1\leqslant i\leqslant l)$, 共 $l$ 个. 再加上所有 $e_{ij}-e_{l+j,l+i}(1\leqslant i\neq j\leqslant l)$, 有 $l^2-l$ 个. 对 $n$, 我们使用矩阵 $e_{i,l+i}(1\leqslant i\leqslant l)$ 和 $e_{i,l+j}+e_{j,l+i}(1\leqslant i<j\leqslant l)$, 共 $l+\frac{1}{2}l(l-1)$ 个. 对 $p$ 的位置, 可作类似的处理. 合并起来, 我们发现 $\dim\mathfrak{sp}(2l, \mathrm{F})=2l^2+l$.

$B_l$: 设 $\dim V=2l+1$ 是奇数, 且取 $f$ 为 $V$ 上非退化对称双线性型, 它的矩阵为

$$s=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_l\\ 0 & I_l & 0\end{pmatrix}.$$

**正交代数** $\mathfrak{o}(V)$ 或 $\mathfrak{o}(2l+1, \mathsf{F})$ 就是由满足 $f(x(v), w)=-f(v, x(w))$ (与 $\mathsf{C}_l$ 同样的要求)的 $V$ 的所有自同态所组成. 如果按 $S$ 的形状将 $x$ 分块, 即

$$x=\begin{pmatrix}a & b_1 & b_2\\ c_1 & m & n\\ c_2 & p & q\end{pmatrix},$$

则条件 $sx=-x^ts$ 可以转换成以下一组条件: $a=0$, $c_1=-b_2^t$, $c_2=-b_1^t$, $q=-m^t$, $n^t=-n$, $p^t=-p$. (与 $\mathsf{C}_l$ 的情形一样, 这说明了 $Tr(x)=0$.) 作为一组基, 首先取 $l$ 个对角阵 $e_{ii}-e_{l+i,l+i}(2\leqslant i\leqslant l+1)$. 再加上 $2l$ 个只含第1行或第1列的矩阵 $e_{1,l+i+1}-e_{i+1,1}$ 和 $e_{1,i+1}-e_{l+i+1,1}(1\leqslant i\leqslant l)$. 相应于 $q=-m^t$, 取(与 $\mathsf{C}_l$ 一样) $e_{i+1,j+1}-e_{l+j+1,l+i+1}(1\leqslant i\neq j\leqslant l)$. 对 $n$, 取 $e_{i+1,l+j+1}-e_{j+1,l+i+1}$ $(1\leqslant i<j\leqslant l)$, 对 $p$, 取 $e_{i+l+1,j+1}-e_{j+l+1,i+1}(1\leqslant j<i\leqslant l)$. 基元素总数是 $2l^2+l$ (注意这也是 $\mathsf{C}_l$ 的维数).

$\mathsf{D}_l$: 我们得到另一个**正交代数**, 它的结构和 $\mathsf{B}_l$ 完全一样, 只不过 $\dim V=2l$ 是偶数, 且 $s$ 具有更简单的形式 $\begin{pmatrix}0 & I_l\\ I_l & 0\end{pmatrix}$. 把构造它的基以及验证 $\dim\mathfrak{o}(2l, \mathsf{F})=2l^2-l$ 作为练习留给读者(练习8).

在结束本小节之前, 再提出 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 的其它几个子代数, 它们起着重要的辅助作用. 令 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$ 是**上三角阵**(即 $(a_{ij})$, 当 $i>j$ 时, $a_{ij}=0$) 的集合, $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 是**严格上三角阵**(当 $i\geqslant j$ 时, $a_{ij}=0$)的集合. 再设 $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$ 是所有**对角阵**的集合. 显然它们在方括号运算下都是封闭的. 也注意到 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})=\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})+\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ (作为向量空间的直和), $[\mathfrak{d}(n, \mathsf{F}), \mathfrak{n}(n, \mathsf{F})]=\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$, 所以

$$[\mathfrak{t}(n, \mathsf{F}), \mathfrak{t}(n, \mathsf{F})]=\mathfrak{n}(n, \mathsf{F}).$$

请参看练习5. (若 $H$, $K$ 是 $L$ 的子代数, 则 $[HK]$ 表示由换位

子 $[xy]$, $x\in H$, $y\in K$ 所张成的 $L$ 的子空间.)

## 1.3. 导子李代数

某些线性变换的李代数自然地来源于代数的导子. 所谓F代数(不必结合的)就是指F上一个向量空间 $\mathfrak{A}$, 再被赋予一个双线性运算 $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, 通常就用两个字母连写来表示这个运算(只有当 $\mathfrak{A}$ 是李代数时, 才使用方括号). $\mathfrak{A}$ 的**导子**是指一个线性映射 $\delta$: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, 它满足大家熟知的乘积规则 $\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$. 很易验证, $\mathfrak{A}$ 的所有导子的集合 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{A}$ 是 $\mathrm{End}\,\mathfrak{A}$ 的一个向量子空间, 而且可验证, 两个导子的换位子 $[\delta, \delta']$ 仍是一个导子(但通常的乘积不一定如此, 见练习 11). 所以 $\mathrm{Der}\,\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$ 的一个子代数.

因为一个李代数 $L$ 是上述意义下的F代数, 所以 $\mathrm{Der}\,L$ 是有定义的. 某些导子很自然地如下产生: 若 $x\in L$, 则 $y\mapsto[xy]$ 是 $L$ 的自同态, 记为 $\mathrm{ad}\,x$. 事实上, $\mathrm{ad}\,x\in\mathrm{Der}\,L$, 这是因为我们可将 Jacobi 等式写成(利用($L2'$)): $[x[yz]]=[[xy]z]+[y[xz]]$. 这一形式的导子称为**内导子**, 其它都称为**外导子**. 当然, 在 $x\neq0$ 时也有可能 $\mathrm{ad}\,x=0$: 例如在所有的一维李代数内就是如此. 把 $x$ 对应到 $\mathrm{ad}\,x$ 的映射 $L\to\mathrm{Der}\,L$ 称为 $L$ 的**伴随表示**, 它在以后起着决定性的作用.

有时同时把 $x$ 看作 $L$ 的元素以及 $L$ 的子代数 $K$ 的元素. 为了避免混淆, 使用记号 $\mathrm{ad}_L x$ 或 $\mathrm{ad}_K x$, 以分别表示 $x$ 作用在 $L$ 上或 $K$ 上. 例如, 若 $x$ 是对角阵, 则 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{d}(n,F)}(x)=0$, 而 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(n,F)}(x)$ 不必为 0.

## 1.4. 抽象李代数

我们已看到了线性李代数的一些自然的例子. 大家也知道, 实际上每一(有限维)李代数都同构于某个线性李代数 (Ado-Iwasawa 定理). 在此不打算证明它 (参看 Jacobson[1] 第六章或 Bourbaki[1]). 不过在李代数理论的初始阶段, 这个结果对所有我

们感兴趣的情形都是正确的.

有时我们想要抽象地考察李代数. 例如, 若 $L$ 是 F 上任意有限维向量空间, 我们可对所有 $x, y \in L$ 置 $[xy]=0$, 把 $L$ 看成一个李代数, 它有平凡的乘法, 称为 Abel **李代数**(因为在线性李代数的情形下, $[x, y]=0$ 正是意味着 $x$ 与 $y$ 可交换). 如果 $L$ 是任一李代数, 具有基 $x_1, \cdots, x_n$. 显然, $L$ 的整个乘法表可由**结构常数** $a_{ij}^k$ 完全确定, 这里 $[x_i x_j]=\sum_{k=1}^n a_{ij}^k x_k$. 那些 $i \geqslant j$ 的结构常数可利用 $(L2)$, $(L2')$ 从其它常数推导出. 根据这段话, 只要给出一个结构常数集, 就能确定一个抽象李代数. 当然, 不是随便哪一个集合 $\{a_{ij}^k\}$ 均可, 但经稍加思索后即可发现, 只要它满足由 $(L2)$ 和 $(L3)$ 所导出的一些"显然"的等式就可以了:

$$a_{ii}^k=0=a_{ij}^k+a_{ji}^k;$$

$$\sum_k (a_{ij}^k a_{kl}^m+a_{jl}^k a_{ki}^m+a_{li}^k a_{kj}^m)=0.$$

事实上并不用这种人为的方法构造李代数. 不过作为抽象观点的应用, 可以确定维数 $\leqslant 2$ 的所有李代数(到同构的程度). 在维数为 1 的情形, 有一个单独的基向量 $x$, 具有乘法表 $[xx]=0$ $(L2)$. 在维数为 2 的情形, 从 $L$ 的基 $x, y$ 出发. 显然 $L$ 内所有的乘积都等于 $[xy]$ 的一个纯量倍. 如果它们都等于 0, 则 $L$ 是 Abel 的. 否则, 我们在由 $[xy]$ 的纯量倍所成的一维空间内任取一个张成向量, 用它代替原来基中的 $x$, 再取一个与新的 $x$ 线性无关的向量作为新 $y$. 则 $[xy]=ax\,(a\neq 0)$. 把 $y$ 换成 $a^{-1}y$, 最终可得 $[xy]=x$. 所以从抽象的观点看, 至多存在一个非 Abel 的 $L$. (读者可验证 $[xy]=x$ 确实定义了一个李代数.)

## 练　习

1. 设 $L$ 是实向量空间 $\mathbf{R}^3$. 对 $x, y \in L$ 定义 $[xy]=x\times y$(向量的外积). 验证 $L$ 是李代数. 写出关于 $\mathbf{R}^3$ 的常用基的结构常数.

2. 验证: 以下的等式以及 $(L1)$、$(L2)$ 在以 $(x, y, z)$ 为基的三维向量空间上定义了一个李代数结构: $[xy]=z$, $[xz]=y$, $[yz]=0$.

3. 设 $x=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ 是 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 的一个有序基. 计算 $\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,h, \mathrm{ad}\,y$ 关于这个基的矩阵.

4. 找出一个同构于 (1.4) 中所构造的非 Abel 二维李代数的线性李代数. [提示: 观察伴随表示.]

5. 验证 (1.2) 内关于 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$, $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$, $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 的论断, 且通过列举出它们的基以计算每一代数的维数.

6. 设 $x\in\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 在 F 内有 $n$ 个不同的特征值 $a_1, \cdots, a_n$. 证明 $\mathrm{ad}\,x$ 的特征值恰好就是 $n^2$ 个纯量 $a_i-a_j(1\leqslant i, j\leqslant n)$, 它们当然不必各不相同.

7. 设 $\mathfrak{s}(n, \mathsf{F})$ 表示 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 内的纯量阵(=单位阵的纯量倍). 若 $\mathrm{char}\,\mathsf{F}$ 是 0 或除不尽 $n$ 的素数, 证明 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})=\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})+\mathfrak{s}(n, \mathsf{F})$ (向量空间的直和), 且 $[\mathfrak{s}(n, \mathsf{F}), \mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})]=0$.

8. 验证 $\mathsf{D}_l$ 的维数.

9. 当 $\mathrm{char}\,\mathsf{F}=0$ 时, 证明每一典型李代数 $L=\mathsf{A}_l, \mathsf{B}_l, \mathsf{C}_l$ 或 $\mathsf{D}_l$ 等于 $[LL]$(这再一次说明了这些代数都由迹 0 矩阵组成).

10. 对 $l$ 的较小的值, 某些典型李代数之间存在着同构. 证明: $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \mathsf{C}_1$ 是同构的, 而 $\mathsf{D}_1$ 是一维李代数. 证明 $\mathsf{B}_2$ 同构于 $\mathsf{C}_2$, $\mathsf{D}_3$ 同构于 $\mathsf{A}_3$. 关于 $\mathsf{D}_2$, 你能说些什么?

11. 验证: F 代数的两个导子的换位子仍是导子. 而通常的乘积则不一定如此.

12. 设 $L$ 是代数闭域上的李代数, $x\in L$. 证明 $L$ 中由 $\mathrm{ad}\,x$ 的特征向量所张成的子空间是一个子代数.

# 2. 理想和同态

## 2.1. 理　　想

设 $I$ 是李代数 $L$ 的子空间, 若 $x\in L, y\in I$ 就有 $[xy]\in I$, 则称 $I$ 为 $L$ 的理想. (由于 $[xy]=-[yx]$, 故上述条件也可写成 $[yx]\in I$.) 理想在李代数理论中所起的作用相当于正规子群在群论中所起的作用以及双侧理想在环论中所起的作用, 因为它们都来源于同态(2.2)的核.

显然 0 (只含零向量的子空间)和 $L$ 自己是 $L$ 的理想. 一个

不那么显易的例子，是中心 $Z(L)=\{z\in L\mid [xz]=0$ 对所有 $x\in L\}$. 由雅可比等式立即可证 $Z(L)$ 确实是一个理想. 注意：$L$ 为 Abel 李代数当且仅当 $Z(L)=L$. 另一个重要的例子是 $L$ 的导代数，记为 $[LL]$，它类似于群的换位子子群. 它由换位子 $[xy]$ 的所有线性组合所构成，且显然是一个理想.

显然 $L$ 是 Abel 李代数当且仅当 $[LL]=0$. 而另一种极端的情形是 $L=[LL]$：对 (1.2) 中 $L=\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ (当 $\mathrm{char}\,\mathsf{F}=2$ 时，设 $n\neq 2$) 的乘法表加以研究后即可看出，此时 $L=[LL]$，而其它典型线性李代数也有同样的结果(练习 1.9).

若 $I$, $J$ 是李代数 $L$ 的两个理想，则 $I+J=\{x+y\mid x\in I,\ y\in J\}$ 也是理想. 类似地，$[IJ]=\{\sum [x_iy_i]\mid x_i\in I,\ y_i\in J\}$ 是一个理想；导代数 $[LL]$ 正是它的特殊情形.

通过观察一个李代数的理想来分析李代数的结构是很自然的. 如果 $L$ 除了它自己和 0 以外没有其它理想，且若 $[LL]\neq 0$，即称 $L$ 是单纯的. 这里加上条件 $[LL]\neq 0$ (即 $L$ 非 Abel) 是为了除去一维李代数的情形. 显然，$L$ 单纯意味着 $Z(L)=0$ 且 $L=[LL]$.

**例** 设 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, $\mathrm{char}\,\mathsf{F}\neq 2$. 取以下三个矩阵作为 $L$ 的标准基(见 (1.2))：$x=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. 则乘法表由等式 $[xy]=h$, $[hx]=2x$, $[hy]=-2y$ 所完全确定. (请注意 $x, y, h$ 是 $\mathrm{ad}\,h$ 的特征向量，相应的特征值是 $2, -2, 0$. 又因 $\mathrm{char}\,\mathsf{F}\neq 2$, 这些特征值各不相同.) 若 $I\neq 0$ 是 $L$ 的理想，设 $ax+by+ch$ 是 $I$ 的任意非零元素. 两次运用 $\mathrm{ad}\,x$ 可得 $-2bx\in I$，两次运用 $\mathrm{ad}\,y$，可得 $-2ay\in I$. 于是如果 $a$ 或 $b$ 非零，$I$ 就或者包含 $y$ 或者包含 $x$ ($\mathrm{char}\,\mathsf{F}\neq 2$)，此时显然有 $I=L$. 另一方面，若 $a=b=0$，则 $0\neq ch\in I$，再一次得到 $I=L$. 从而可得结论：$L$ 是单纯的.

在李代数 $L$ 不是单纯(且不是一维)的情形，可以"除去"一个非零真理想 $I$，得到一个较低维数的李代数. 商代数 $L/I$ ($I$ 是 $L$ 的理想) 的构造法在形式上和商环的构造法完全相同：作为向量空

间，$L/I$ 就是商空间，而它的李乘法定义为 $[x+I,\ y+I]=[xy]+I$. 这样的定义是有意义的：因为若 $x+I=x'+I,\ y+I=y'+I$，则有 $x'=x+u(u\in I),\ y'=y+v(v\in I)$，此时

$$[x'y']=[xy]+([uy]+[xv]+[uv]),$$

由于括号里的项都在 $I$ 内，所以 $[x'y']+I=[xy]+I$.

为了后面的需要，在此要提及几个有关的概念，它们类似于群论中的相应概念. $L$ 的子代数 $K$（或仅仅是子空间）的**正规化子**被定义为 $N_L(K)=\{x\in L\mid [xK]\subset K\}$. 由于 Jacobi 等式，$N_L(K)$ 是 $L$ 的子代数，它可被描述为 $L$ 中包含 $K$ 作为它的理想的最大子代数（此时首先要求 $K$ 是子代数）. 若 $K=N_L(K)$，则称 $K$ 是**自正规的**，这一情形的一些重要例子将在以后给出. $L$ 的一个子集 $X$ 的**中心化子**是 $C_L(X)=\{x\in L\mid [xX]=0\}$. 再一次利用 Jacobi 等式可知 $C_L(X)$ 是 $L$ 的子代数. 例如：$C_L(L)=Z(L)$.

## 2.2. 同态和表示

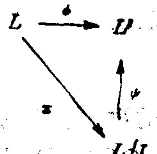
它的定义丝毫不会使人感到突然. 若一个线性变换 $\phi: L\to L'$（$L,\ L'$ 是 F 上李代数）对所有 $x,\ y\in L$ 都有

$$\phi([xy])=[\phi(x)\phi(y)],$$

则称 $\phi$ 为**同态**. 如果 $\mathrm{Ker}\,\phi=0$，则称 $\phi$ 为**单一同态**. 若 $\mathrm{Im}\,\phi=L'$，$\phi$ 被称为**满同态**. 如果它既是单一同态，又是满同态，则称为**同构**（如(1.1)）. 我们首先感兴趣的是：$\mathrm{Ker}\,\phi$ 是 $L$ 的一个理想，确实，如果 $\phi(x)=0$，且若 $y\in L$ 是任意的，那么

$$\phi([xy])=[\phi(x)\phi(y)]=0.$$

显然 $\mathrm{Im}\,\phi$ 是 $L'$ 的子代数. 如同在其它的代数理论中一样，在同态和理想之间有一个自然的一一对应：对一个 $\phi$，有一个 $\mathrm{Ker}\,\phi$ 与它相连；对一个理想 $I$，可联系一个从 $L$ 到 $L/I$ 上的**典范映射** $x\mapsto x+I$. 以下的标准同态定理的证明留给读者作练习.




**命题** (a) 若 $\phi: L\to L'$ 是李代数的同态，则

$L/\mathrm{Ker}\,\phi\cong\mathrm{Im}\,\phi$. 如果 $I$ 是 $L$ 的任一被包含在 $\mathrm{Ker}\,\phi$ 内的理想，则存在唯一的同态 $\psi: L/I\to L'$，使得上面的图是交换的($\pi$ 是典范映射).

(b) 若 $I$ 和 $J$ 是 $L$ 的理想，使得 $I\subset J$，则 $J/I$ 是 $L/I$ 的一个理想，且 $(L/I)/(J/I)$ 自然同构于 $L/J$.

(c) 若 $I, J$ 是 $L$ 的理想，则存在 $(I+J)/J$ 与 $I/(I\cap J)$ 之间的自然同构. ▮

李代数 $L$ 的表示是一个同态 $\phi: L\to\mathfrak{gl}(V)$ ($V$ = F 上向量空间). 虽然我们要求 $L$ 是有限维的，但允许 $V$ 是任意维的，这对我们是有用的. 在上述任一情形里，$\mathfrak{gl}(V)$ 都有意义. 不过，到目前为止需要记住的仅有的重要例子是伴随表示 $\mathrm{ad}: L\to\mathfrak{gl}(L)$，这是在(1.3)引入的，它把 $x$ 对应到 $\mathrm{ad}\,x$，而 $\mathrm{ad}\,x(y)=[xy]$. ($\mathrm{ad}$ 的像在 $\mathrm{Der}\,L\subset\mathfrak{gl}(L)$ 内，但目前这与我们没有什么关系.) 很清楚，$\mathrm{ad}$ 是一个线性变换. 为了证明它保持方括号运算，我们计算:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}\,x,\ \mathrm{ad}\,y](z) &= \mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y(z)-\mathrm{ad}\,y\,\mathrm{ad}\,x(z)\\
&= \mathrm{ad}\,x([yz])-\mathrm{ad}\,y([xz])\\
&= [x[yz]]-[y[xz]]\\
&= [x[yz]]+[[xz]y] \qquad (L2')\\
&= [[xy]z] \qquad (L3)\\
&= \mathrm{ad}[xy](z).
\end{aligned}$$

$\mathrm{ad}$ 的核是什么？它由所有使 $\mathrm{ad}\,x=0$ 的 $x\in L$ 所组成，即使得 $[xy]=0$ (对所有的 $y\in L$) 的所有 $x$. 因此 $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}=Z(L)$. 由此已经可以得出一个有趣的推论: 若 $L$ 是单纯的，则 $Z(L)=0$，从而 $\mathrm{ad}: L\to\mathfrak{gl}(L)$ 是单一同态. 这意味着任一单纯李代数同构于一个线性李代数.

## 2.3. 自 同 构

$L$ 的自同构就是 $L$ 到自身上的同构. $\mathrm{Aut}\,L$ 表示所有自同构的群. 重要的例子产生于当 $L$ 是一个线性李代数 $\subset\mathfrak{gl}(V)$ 时. 若 $g\in GL(V)$ 是 $V$ 的任一可逆自同态，且 $gLg^{-1}=L$，则立即可知映

射 $x\mapsto gxg^{-1}$ 是 $L$ 的自同构. 例如, 若 $L=\mathfrak{gl}(V)$ 或 $\mathfrak{sl}(V)$, 则此时第二个条件是自动满足的, 这样我们就得到相当多的自同构(见练习 12).

现在限于 $\operatorname{char}\mathsf{F}=0$ 的情形. 设 $x\in L$ 是一个元素, 使 $\operatorname{ad}x$ 是幂零的, 即对某一 $k>0$, 有 $(\operatorname{ad}x)^k=0$. 则 $\mathfrak{O}$ 上线性变换的通常的指数幂级数在 $\mathsf{F}$ 上也有意义, 这是因为它只有有限多个项:

$$\exp(\operatorname{ad}x)=1+\operatorname{ad}x+(\operatorname{ad}x)^2/2!+(\operatorname{ad}x)^3/3!+\cdots+(\operatorname{ad}x)^{k-1}/(k-1)!.$$

可以断定 $\exp(\operatorname{ad}x)\in\operatorname{Aut}L$. 更一般地, 当 $\operatorname{ad}x$ 换成 $L$ 的任意一个幂零导子 $\delta$ 时, 这一结论仍正确. 为此, 使用熟悉的 Leibniz 公式:

$$\frac{\delta^n}{n!}(xy)=\sum_{i=0}^{n}(1/i!)(\delta^i x)(1/(n-i)!)(\delta^{n-i}y).$$

然后如下计算(设 $\delta^k=0$):

$$\begin{aligned}\exp\delta(x)\exp\delta(y)&=\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\delta^i x}{i!}\right)\right)\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{\delta^j y}{j!}\right)\right)\\&=\sum_{n=0}^{2k-2}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\delta^i x}{i!}\right)\left(\frac{\delta^{n-i}y}{(n-i)!}\right)\right)\\&=\sum_{n=0}^{2k-2}\frac{\delta^n(xy)}{n!}\qquad\text{(Leibniz 公式)}\\&=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\delta^n(xy)}{n!}\qquad(\delta^k=0)\\&=\exp\delta(xy).\end{aligned}$$

$\exp\delta$ 是可逆的, 因为它的逆是 $1-\eta+\eta^2-\eta^3+\cdots\pm\eta^{k-1}$, 这里设 $\exp\delta=1+\eta$.

若 $\operatorname{ad}x$ 幂零, 形如 $\exp(\operatorname{ad}x)$ 的自同构称为内自同构. 更一般地, 由它们生成的 $\operatorname{Aut}L$ 的子群记为 $\operatorname{Int}L$, 它的元素称为内自同构. 这是一个正规子群, 即若 $\phi\in\operatorname{Aut}L$, $x\in L$, 则

$$\phi(\operatorname{ad}x)\phi^{-1}=\operatorname{ad}\phi(x),$$

从而 $\phi\exp(\operatorname{ad}x)\phi^{-1}=\exp(\operatorname{ad}\phi(x))$.

举例来说, 设 $L=\mathfrak{sl}(2,\mathsf{F})$ 带有标准基 $(x, y, h)$. 定义 $\sigma=$

$\exp \operatorname{ad} x \cdot \exp \operatorname{ad}(-y) \cdot \exp \operatorname{ad} x$ (因此 $\sigma \in \operatorname{Int} L$). 很易计算 $\sigma$ 作用在基上的效果(练习 10): $\sigma(x)=-y$, $\sigma(y)=-x$, $\sigma(h)=-h$. 特别是 $\sigma$ 具有阶数 2. 注意到 $\exp x$, $\exp(-y)$ 都是行列式为 1 的 $2\times 2$ 矩阵的群 $SL(2, \mathsf{F})$ 的元素, 用它们作共轭能使 $L$ 保持不变(在本小节开始时已指出), 所以乘积 $s=(\exp x)(\exp -y)(\exp x)$ 诱导了 $L$ 的一个自同构 $z\mapsto szs^{-1}$. 很快地计算即可得到

$$s=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

且用 $s$ 共轭作用在 $L$ 上的效果与 $\sigma$ 的效果完全相同.

刚才看到的现象并不是偶然的: 若 $L\subset \mathfrak{gl}(V)$ 是任意的线性李代数 ($\operatorname{char} \mathsf{F}=0$), 且 $x\in L$ 是幂零的, 则我们可断言: 对所有的 $y\in L$,

$$(\exp x)y(\exp x)^{-1}=\exp \operatorname{ad} x(y). \qquad (*)$$

为了证明它, 只要注意到 $\operatorname{ad} x=\lambda_x+\rho_{-x}$, 这里的 $\lambda_x$, $\rho_x$ 表示在环 $\operatorname{End} V$ 内用 $x$ 左乘与右乘变换(当然它们是可交换的, 并且是幂零的). 由通常的指数规则可得

$$\exp \operatorname{ad} x=\exp(\lambda_x+\rho_{-x})=\exp \lambda_x \cdot \exp \rho_{-x}=\lambda_{\exp x}\cdot \rho_{\exp(-x)},$$

从而可得 (*).

## 练　习

1. 证明所有内导子 $\operatorname{ad} x (x\in L)$ 的集合是 $\operatorname{Der} L$ 的一个理想.

2. 证明 $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ 就是 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 的导代数(参看练习 1.9).

3. 证明 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 的中心等于 $\mathfrak{s}(n, \mathsf{F})$ (纯量阵). 证明 $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ 的中心是 0, 除非 $\operatorname{char} \mathsf{F}$ 能除尽 $n$, 此时中心为 $\mathfrak{s}(n, \mathsf{F})$.

4. 证明存在唯一的一个(在同构意义下) $\mathsf{F}$ 上的 3 维李代数, 它的导代数是一维的, 且在 $Z(L)$ 内.

5. 假设 $\dim L=3$, $L=[LL]$. 证明 $L$ 必定是单纯的. [首先注意到 $L$ 的任一同态像也与它的导代数相等.] 由此再一次证明 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, $\operatorname{char} \mathsf{F}\neq 2$ 的单纯性.

6. 证明 $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ 是单纯的, 除非 $\operatorname{char} \mathsf{F}=3$ (见练习 3). [使用标准基 $h_1$, $h_2$, $e_{ij}(i\neq j)$. 若 $I\neq 0$ 是一个理想, 则 $I$ 是 $\operatorname{ad} h_1$ 或 $\operatorname{ad} h_2$ 的特征空间的

直和，再比较 $\mathrm{ad}\,h_1$, $\mathrm{ad}\,h_2$ 作用在 $e_{ij}$ 上的特征值.]

7. 证明 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$ 和 $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$ 是 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 的自正规子代数，而 $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 有正规化子 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$.

8. 证明当 $\mathrm{char}\,\mathsf{F}=0$ 时，在(1.2)内的每一个典型线性李代数中，对角矩阵的集合是一个自正规子代数.

9. 证明命题 2.2.

10. 设 $\sigma$ 是(2.3)内定义的 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$的自同构. 验证 $\sigma(x)=-y$, $\sigma(y)=-x$, $\sigma(h)=-h$.

11. 若 $L=\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$, $g\in GL(n, \mathsf{F})$, 证明由 $x\mapsto -gx^tg^{-1}$ (其中 $x^t=x$ 的转置)定义的 $L$ 到自身的映射属于 $\mathrm{Aut}\,L$. 当 $n=2$, $g=$恒等矩阵时，证明这一自同构是内自同构.

12. 设 $L$ 是正交李代数(型 $\mathsf{B}_l$ 或 $\mathsf{D}_l$). 若 $g$ 是正交矩阵，即 $g$ 可逆，且 $g^tsg=s$. 证明 $x\mapsto gxg^{-1}$ 定义了 $L$ 的一个自同构.

# 3. 可解和幂零李代数

## 3.1. 可 解 性

通过理想来研究李代数 $L$ 是很自然的. 在本节内，我们将利用逐次构造导代数以研究李代数 $L$. 首先，定义一个 $L$ 的理想的序列(导出列)：$L^{(0)}=L$, $L^{(1)}=[LL]$, $L^{(2)}=[L^{(1)}L^{(1)}]$, $\cdots$, $L^{(i)}=[L^{(i-1)}L^{(i-1)}]$. 若对某一个 $n$ 有 $L^{(n)}=0$, 则称 $L$ 是**可解李代数**. 例如，Abel 李代数必是可解的，而单纯李代数必是不可解的.

更一般的例子是 (1.2) 中引入的上三角阵的李代数 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$. $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$ 的显易基是由矩阵 $e_{ij}(i\leqslant j)$ 所组成，维数是 $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$. 为了证明 $L=\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$ 是可解的，我们使用 (1.2) 中的换位子公式以计算它的导出列. 对 $i<l$, 我们有 $[e_{ii}, e_{il}]=e_{il}$, 这说明 $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})\subset[LL]$, 这里的 $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 是上三角幂零阵的子代数. 由于 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})=\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})+\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 以及 $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$ 是 Abel 的，可知 $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 等于 $L$ 的导代数(见练习 1.5). 然后在代数 $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 的内部进行工作，对于 $e_{ij}$, 我们很自然的可得到一个“位级”，即 $j-i$

的概念. 在换位子公式里假设 $i<j$, $k<l$, 并且 $i\neq l$. 此时 $[e_{ij}, e_{kl}]=e_{il}$(若 $j=k$)或 0 (其它情形). 特别地, 每一个 $e_{il}$ 是这样的两个矩阵的换位子, 它们的位级加起来等于 $e_{il}$ 的位级. 所以 $L^{(2)}$ 由位级$\geqslant 2$ 的 $e_{ij}$ 所张成, $L^{(i)}$ 由位级$\geqslant 2^{i-1}$ 的 $e_{ij}$ 所张成. 显然当 $2^{i-1}>n-1$ 时, $L^{(i)}=0$.

下面我们归纳了一些关于可解性的简单结论:

**命题** 设 $L$ 是一个李代数.

(a) 若 $L$ 可解, 则 $L$ 的所有子代数以及同态像也可解.

(b) 若 $I$ 是 $L$ 的可解理想, 使 $L/I$ 可解, 则 $L$ 自己也可解.

(c) 若 $I$, $J$ 是 $L$ 的可解理想, 则 $I+J$ 也是可解理想.

**证** (a) 由定义, 若 $K$ 是 $L$ 的子代数, 则 $K^{(i)}\subset L^{(i)}$. 类似地, 若 $\phi: L\rightarrow M$ 是满同态, 则对 $i$ 使用归纳法易证 $\phi(L^{(i)})=M^{(i)}$.

(b) 设 $(L/I)^{(n)}=0$. 应用(a)于典范同态 $\pi: L\rightarrow L/I$, 可得到 $\pi(L^{(n)})=0$ 或 $L^{(n)}\subset I=\operatorname{Ker}\pi$. 如果 $I^{(m)}=0$, 则由 $(L^{(i)})^{(j)}=L^{(i+j)}$ 可推得 $L^{(n+m)}=0$ (将(a)的证明应用于 $L^{(n)}\subset I$).

(c) 由标准同态定理(命题 2.2(c)) 可得到在 $(I+J)/J$ 与 $I/(I\cap J)$ 之间的一个同构. 作为 $I$ 的同态像, 右边一个是可解的, 所以 $(I+J)/J$ 是可解的. 再将 (b) 用于 $I+J$, $J$, 则可得 $I+J$ 为可解. ∎

作为第一个应用, 设 $L$ 是任一李代数, $S$ 是一个极大可解理想(即它不含于更大的可解理想之内). 若 $I$ 是 $L$ 的另一个可解理想, 则由上面命题的 (c), 必定有 $S+I=S$, 即 $I\subset S$. 这就证明了唯一的极大可解理想的存在性, 称它为 $L$ 的**根基**, 并记为 $\operatorname{Rad} L$. 若 $L\neq 0$, 且 $\operatorname{Rad} L=0$, 则称 $L$ 为**半单纯的**. 例如, 单纯李代数必是半单纯的: 因为 $L$ 除了 0 和它自己外没有其它理想, 而 $L$ 又是不可解的. 请注意, 若 $L$ 不可解, 即 $L\neq \operatorname{Rad} L$, 则 $L/\operatorname{Rad} L$ 是半单纯的(使用上述命题的 (b)). 对半单纯李代数 ($\operatorname{char} F=0$) 的研究将占据本书的大部分篇幅(但在研究中也需要某些可解子代数).

## 3.2. 幂 零 性

可解的定义摹仿了群论中相应的概念，这些概念起源于 Abel 和 Galois. 与之相反，幂零群的概念则是近代的，而且是以李代数中的相应概念作为模型的. 下面定义 $L$ 的理想的一个序列(称为降中心列或下中心列)：$L^0=L$, $L^1=[LL](=L^{(1)})$, $L^2=[LL^1]$, $\cdots$, $L^i=[LL^{i-1}]$. 若对某一个 $n$，有 $L^n=0$，则称 $L$ 为幂零的. 例如任一 Abel 李代数是幂零的. 显然对所有的 $i$，都有 $L^{(i)}\subset L^i$，所以幂零李代数是可解的. 但反过来并不成立. 再来看看 $L=\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$，在(3.1)的讨论中已证明 $L^{(1)}=L^1$ 就是 $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$，而且 $L^2=[LL^1]=L^1$，所以对所有的 $i\geqslant 1$ 有 $L^i=L^1$. 另一方面，很易看出 $M=\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 是幂零的：$M^1$ 由位级 $\geqslant 2$ 的 $e_{ij}$ 所张成，$M^2$ 由位级 $\geqslant 3$ 的 $e_{ij}$ 所张成，$\cdots$，$M^i$ 由位级 $\geqslant i+1$ 的 $e_{ij}$ 所张成.

**命题** 设 $L$ 是李代数.

(a) 若 $L$ 幂零，则它的所有子代数和同态像也幂零.

(b) 若 $L/Z(L)$ 幂零，则 $L$ 也幂零.

(c) 若 $L$ 幂零，则 $Z(L)\neq 0$.

**证** (a) 模仿命题 3.1(a) 的证明.

(b) 若 $L^n\subset Z(L)$，则 $L^{n+1}=[LL^n]\subset[LZ(L)]=0$.

(c) 降中心列的最后一个非零项必是中心的. ▌

$L$ 为幂零的条件也可这样叙述：存在某个 $n$(仅依赖于 $L$)，使 $\operatorname{ad}x_1\operatorname{ad}x_2\cdots\operatorname{ad}x_n(y)=0$ 对所有 $x_i, y\in L$ 都成立. 尤其对所有 $x\in L$ 都有 $(\operatorname{ad}x)^n=0$. 若 $L$ 是任意的李代数，且 $x\in L$，如果 $\operatorname{ad}x$ 是幂零自同态，则称 $x$ 为 **ad 幂零的**. 运用这一术语，我们的结论可表达为：若 $L$ 幂零，则 $L$ 的所有元素都是 ad 幂零的. 从下面定理可看出，它的逆命题也正确.

**定理** (Engel) 若 $L$ 的所有元素是 ad 幂零的，则 $L$ 是幂零的.

证明将在下一小节给出. 应用 Engel 定理后，不需实际计算降中心列即易证明 $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 是幂零的. 只要应用以下的简单引理.

**引理** 设 $x\in \mathfrak{gl}(V)$ 是幂零自同态，则 $\operatorname{ad} x$ 也是幂零的.

**证** 如同 (2.3) 中一样，对 $x$ 我们可联系 $\operatorname{End} V$ 中的两个自同态，左平移与右平移: $\lambda_x(y)=xy$, $\rho_x(y)=yx$. 由于 $x$ 是幂零的，它们也是幂零的. 并且 $\lambda_x$ 和 $\rho_x$ 显然是可交换的. 在任一环中(这里是指 $\operatorname{End}(\operatorname{End} V)$)，两个可换幂零元的和或差仍是幂零的(为什么?). 所以 $\operatorname{ad} x=\lambda_x-\rho_x$ 是幂零的. ∎

在此预提一句: 在 $\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 中，要使一个矩阵是 ad 幂零而它本身并不幂零是一件很容易的事. (恒等阵就是这样的例.) 读者应该记住两种截然不同的幂零线性李代数: $\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$ 与 $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$.

## 3.3. Engel 定理的证明

Engel 定理(3.2)将从下述的结果推导出来，而这个结果本身也是很有意思的. 回想起一个单独的幂零线性变换，至少有一个特征向量，与它的仅有的特征值 0 相对应. 这正是下面定理中的 $\dim L=1$ 的情形.

**定理** 设 $L$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数，$V$ 是有限维的. 若 $L$ 由幂零自同态组成，且 $V\neq 0$，则存在非零的 $v\in V$，使 $L.v=0$.

**证** 对 $\dim L$ 使用归纳法. $\dim L=0$ (或 $\dim L=1$) 的情形是显然的. 假设 $K\neq L$ 是 $L$ 的任一子代数. 按照引理 3.2, $K$ 作用在向量空间 $L$ 上(通过 ad)相当于一个幂零线性变换的李代数，所以在向量空间 $L/K$ 上也是如此. 因为 $\dim K<\dim L$, 归纳法假设保证了在 $L/K$ 内存在一个向量 $x+K\neq K$, 它被 $K$ 在 $\mathfrak{gl}(L/K)$ 内的像映为 0. 这就意味着对所有 $y\in K$ 有 $[yx]\in K$, 且 $x\notin K$. 换句话说, $K$ 被真包含于 $N_L(K)$ (即 $K$ 在 $L$ 内的正规化子，见(2.1))内.

现在把 $K$ 取作 $L$ 的极大真子代数. 上面的论证使 $N_L(K)=L$, 即 $K$ 是 $L$ 的一个理想. 如果 $\dim L/K$ 大于 1, 则 $L/K$ 的一个一维子代数(它总是存在)在 $L$ 内的逆像将是一个真包含 $K$ 的真子代数，这是不可能的. 所以 $K$ 与 $L$ 只相差一维. 于是对任一 $z\in L-K$, 可写成 $L=K+\mathsf{F}z$.

由归纳假设，$W=\{v\in V \mid K.v=0\}$ 是非零的．由于 $K$ 是一个理想，故 $W$ 在 $L$ 下不变：因为 $x\in L$，$y\in K$，$w\in W$ 意味着 $yx.w=xy.w-[x,y].w=0$．按上面那样选取 $z\in L-K$，于是幂零自同态 $z$（作用在子空间 $W$ 上）具有一个特征向量，即存在非零的 $v\in W$，使 $z.v=0$．从而 $L.v=0$，即为所求．▌

**Engel 定理的证明** 我们已知李代数 $L$ 的所有元素均为 ad 幂零，所以代数 $\mathrm{ad}\,L\subset\mathfrak{gl}(L)$ 满足定理 3.1 的假设（可以假设 $L\neq 0$）．结论是：存在 $L$ 内的 $x\neq 0$ 使 $[Lx]=0$，即 $Z(L)\neq 0$．现在 $L/Z(L)$ 显然是由 ad 幂零元素组成且维数小于 $L$ 的维数．对 $\dim L$ 使用归纳法，可发现 $L/Z(L)$ 是幂零的．而根据命题 3.2 的 (b)，可知 $L$ 自己也幂零．▌

定理 3.3 有一个有用的推论（实际上是一种等价的表达法），它说明了 $\mathfrak{n}(n,\mathsf{F})$ 是多么"典型"．首先要给出一个定义：若 $V$ 是一个有限维向量空间（例如 $\dim V=n$），则 $V$ 内的一个标志 (flag) 是指一个子空间链 $0=V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_n=V$，$\dim V_i=i$．若 $x\in\mathrm{End}\,V$，且对所有的 $i$，有 $x.V_i\subset V_i$ 成立，则称 $x$ 保持此标志不变．

**推论** 在上述定理的假设下，存在 $V$ 的一个标志 $(V_i)$，它在 $L$ 下不变，且对所有的 $i$，满足 $x.V_i\subset V_{i-1}$．换句话说，存在 $V$ 的一个基，使得 $V$ 关于这个基的 $L$ 的矩阵全在 $\mathfrak{n}(n,\mathsf{F})$ 内．

**证** 首先取任一个被 $L$ 零化的非零的 $v\in V$，上面的定理已保证了这样的 $v$ 的存在．置 $V_1=\mathsf{F}v$．令 $W=V/V_1$，可以看出 $L$ 在 $W$ 上的诱导变换仍是幂零自同态．根据对 $\dim V$ 的归纳法，$W$ 有一个标志在 $L$ 下不变，而这个标志在 $V$ 内的逆像即满足我们的要求．▌

在结束本节时，我们要提及定理 3.3 的一个典型应用，它在以后要用到．

**引理** 设 $L$ 幂零，$K$ 是 $L$ 的理想．若 $K\neq 0$，则 $K\cap Z(L)\neq 0$．（特别地，$Z(L)\neq 0$．参看命题 3.2(c)．）

**证** $L$ 通过伴随表示作用在 $K$ 上，所以由定理 3.3，可得非零的 $x\in K$，它被 $L$ 零化，即 $[Lx]=0$，于是 $x\in K\cap Z(L)$．▌

## 练 习

1. 设 $I$ 是 $L$ 的一个理想. 则 $I$ 的导出列或降中心列的每一项也是 $L$ 的理想.

2. 证明 $L$ 是可解的,当且仅当存在一个子代数链: $L=L_0\supset L_1\supset L_2\supset\cdots\supset L_k=0$, 使得 $L_{i+1}$ 是 $L_i$ 的理想,且每个商代数 $L_i/L_{i+1}$ 是 Abel 的.

3. 设 $\operatorname{char}\mathsf{F}=2$, 证明 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 是幂零的.

4. 证明 $L$ 是可解(幂零)的,当且仅当 $\operatorname{ad} L$ 是可解(幂零)的.

5. 证明(1.4)中构造的非 Abel 2 维代数是可解的,但不是幂零的. 对练习 1.2 的代数也作同样的论证.

6. 证明李代数 $L$ 的两个幂零理想之和仍是幂零理想. 所以 $L$ 具有唯一的极大幂零理想. 对练习 5 的每一代数确定这一理想.

7. 设 $L$ 是幂零的, $K$ 是 $L$ 的真子代数. 证明 $N_L(K)$ 真正包含 $K$.

8. 设 $L$ 是幂零的,证明 $L$ 有一个理想,它的余维数是 1.

9. 证明每一幂零李代数 $L$ 有外导子(见 (1.3)). 可如下考虑: 记 $L=K+\mathsf{F}x$, $K$ 是某一余维数为 1 的理想(练习 8). 则 $C_L(K)\neq 0$ (为什么?). 选 $n$ 使得 $C_L(K)\subset L^n$, $C_L(K)\not\subset L^{n+1}$, 且设 $z\in C_L(K)-L^{n+1}$. 则把 $K$ 映为 0、$x$ 映为 $z$ 的线性映射 $\delta$ 是一个外导子.

10. 设 $L$ 是李代数, $K$ 是 $L$ 的理想, 使得 $L/K$ 幂零以及对所有 $x\in L$, $x|_K$ 幂零. 证明 $L$ 是幂零的.

# 第二章　半单纯李代数

在第一章里，我们看了任意域F上的李代数．除了引进基本概念和例子之外，只能证明一个重要的定理(Engel 定理)．而本书中的其余理论几乎都要求F的特征数是0．(在某些练习中将给出特征数是素数时的反例.) 此外，为了对任意的$x$(不仅仅是对$\mathrm{ad}\,x$幂零的$x$)能利用$\mathrm{ad}\,x$的特征值，除了特别说明的情形外，我们将假设F是代数闭(*)的．当然也可把对F的限制稍微放宽一点(见 Jacobson[1])，但在这里我们不准备这样做.

## 4．李定理和Cartan定理

### 4.1．李　定　理

幂零李代数的Engel定理的本质是：对于一个由幂零自同态组成的李代数，存在一个公共特征向量(定理3.3)．下面的定理实质上类似于Engel定理，但为了保证F含有一切所需的特征值，故要求F是代数闭的．而且还可证明$\mathrm{char}\,F=0$这一条件也是必要的(练习3).

**定理**　设$L$是$\mathfrak{gl}(V)$的可解子代数，$V$为有限维的．若$V\neq 0$，则$V$含有一个关于$L$内所有自同态的公共特征向量.

**证**　对$\dim L$使用数学归纳法．$\dim L=0$的情形是显然的．在此模仿定理3.3的证明．思路是：(1)找一个余维数为1的理想$K$；(2)用归纳法证明存在$K$的公共特征向量；(3)验证由这样的特征向量组成的子空间关于$L$不变；(4)对满足$L=K+\mathrm{F}z$

(*) 译者注：若F是一个域，并且F[$x$](即系数在F内的多项式构成的环)内的任一多项式都能写成一次因式的乘积，就称F是代数闭域．例如，复数域就是代数闭域．

的 $z\in L$, 在这个子空间内找出 $z$ 的一个特征向量.

第 (1) 步是容易的. 由于 $L$ 可解且维数大于 0, 故 $L$ 真正包含 $[LL]$. 由于 $L/[LL]$ 是 Abel 的, 所以任一子空间都是理想. 取一个余维数为 1 的子空间, 则它的逆像 $K$ 是 $L$ 内余维数为 1 的理想(包含 $[LL]$).

第 (2) 步, 利用归纳假设求出 $K$ 的一个公共特征向量 $v\in V$. ($K$ 当然是可解的; 若 $K=0$, 则 $L$ 是一维 Abel 的, 且此时只要找出 $L$ 的基向量的一个特征向量, 即完成了证明.) 这意味着对于 $x\in K$, $x.v=\lambda(x)v$, 其中 $\lambda: K\to \mathsf{F}$ 是某个线性函数. 固定这一 $\lambda$, 且用 $W$ 表示以下的子空间:

$$W=\{w\in V\mid x.w=\lambda(x)w,\ 对所有的\ x\in K\},$$

这样, $W\neq 0$.

第 (3) 步要证明 $L$ 使 $W$ 不变. 假定这一点已经证明了, 进行第 (4) 步: 记 $L=K+\mathsf{F}z$, 利用 $\mathsf{F}$ 是代数闭这一事实, 找出 $z$ 的一个特征向量 $v_0\in W$ (关于 $z$ 的某一特征值). 则 $v_0$ 显然是 $L$ 的公共特征向量(且 $\lambda$ 可以扩张成 $L$ 上的线性函数, 使 $x.v_0=\lambda(x)v_0$, $x\in L$).

余下的是证明 $L$ 使 $W$ 不变. 设 $w\in W$, $x\in L$. 为了检验 $x.w$ 是否在 $W$ 内, 任取一个 $y\in K$ 且验看

$$yx.w=xy.w-[x,\ y].w=\lambda(y)x.w-\lambda([x,\ y])w.$$

应该证明 $\lambda([x,\ y])=0$. 为此, 固定 $w\in W$, $x\in L$. 设 $n>0$ 是使得 $w$, $x.w$, $\cdots$, $x^n.w$ 线性相关的最小整数. 令 $W_i$ 是 $V$ 内由 $w$, $x.w$, $\cdots$, $x^{i-1}.w$ 张成的子空间 ($W_0=0$), 则 $\dim W_n=n$, $W_n=W_{n+i}$ $(i\geqslant 0)$, 且 $x$ 将 $W_n$ 映到 $W_n$ 内. 很易验证每一个 $y\in K$ 都使各个 $W_i$ 不变. 关于 $W_n$ 的基 $w$, $x.w$, $\cdots$, $x^{n-1}.w$, 我们可以断定 $y\in K$ 将被表成一个上三角阵, 其对角元等于 $\lambda(y)$. 这一点可从下面的同余式立即推得:

$$yx^i.w\equiv\lambda(y)x^i.w \pmod{W_i} \qquad (*)$$

为了证明这一同余式, 对 $i$ 使用归纳法. 在 $i=0$ 时是显然的. 记

$$yx^i.w=yxx^{i-1}.w=xyx^{i-1}.w-[x,\ y]x^{i-1}.w.$$

由归纳假设，$yx^{i-1}.w=\lambda(y)x^{i-1}.w+w'$ $(w'\in W_{i-1})$，因为 $x$ 将 $W_{i-1}$ 映到 $W_i$ 内(由 $W_i$ 的构造即可知)，所以(*)对所有的 $i$ 均成立.

按照刚才所描述的 $y\in K$ 在 $W_n$ 上的作用方式，有 $Tr_{W_n}(y)=n\lambda(y)$. 特别，这对形如 $[x, y]$ ($x$ 同上，$y\in K$) 的 $K$ 的元素也正确. 但 $x, y$ 都使 $W_n$ 不变，所以 $[x, y]$ 作用在 $W_n$ 上就好像 $W_n$ 的两个自同态的换位子，所以它的迹等于 0. 从而 $n\lambda([x, y])=0$. 由于 $\mathrm{char}\,\mathsf{F}=0$, 所以 $\lambda([x, y])=0$, 这正是所要求证的. ▮

**推论 A**(李定理) 设 $L$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的可解子代数，$\dim V=n<\infty$. 则 $L$ 使 $V$ 内的某一标志保持不变(换句话说，在 $V$ 内可选取适当的基使 $L$ 的矩阵是上三角的.)

**证** 使用上述定理以及对 $\dim V$ 运用归纳法. ▮

更一般地，设 $L$ 是任一可解李代数，$\phi: L\to\mathfrak{gl}(V)$ 是 $L$ 的一个有限维表示. 则由命题 3.1($a$), $\phi(L)$ 是可解的，从而它使一个标志不变(推论 A). 举例来说，如果 $\phi$ 是伴随表示，在 $L$ 下不变的子空间所成的一个标志正是 $L$ 的一个理想链，它的每一个理想关于后一个的余维数都是 1. 这就证明了:

**推论 B** 设 $L$ 是可解的. 则存在 $L$ 的一个理想链: $0=L_0\subset L_1\subset\cdots\subset L_n=L$, 使得 $\dim L_i=i$. ▮

**推论 C** 设 $L$ 是可解的. 则 $x\in[LL]$ 意味着 $\mathrm{ad}_L x$ 是幂零的. 特别，$[LL]$ 是幂零的.

**证** 如推论 B 一样，找出一个由理想构成的标志. 对于 $L$ 的基 $(x_1, \cdots, x_n)$，其中 $(x_1, \cdots, x_i)$ 张成了 $L_i$, $\mathrm{ad}\,L$ 的矩阵在 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$ 内. 从而 $[\mathrm{ad}\,L, \mathrm{ad}\,L]=\mathrm{ad}_L[LL]$ 的矩阵位于 $\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$ 的导代数 $\mathfrak{n}(n, \mathsf{F})$ 内. 所以关于 $x\in[LL]$, $\mathrm{ad}_L x$ 是幂零的. 由于 $\mathrm{ad}_{[LL]}x$ 也是幂零的，由 Engel 定理，所以 $[LL]$ 是幂零的. ▮

## 4.2. Jordan-Chevalley 分解

仅在本小节中，$\mathrm{char}\,\mathsf{F}$ 可以是任意的. 为了引入研究线性变换的有力工具，现在暂时离开正题. 读者可以回想起，代数闭域上

的单独自同态 $x$ 的 Jordan 标准形，是指把 $x$ 表示成矩阵形式时，可以写为以下形状的块的直和：

$$\begin{bmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & \ddots & a \end{bmatrix}$$

因为 $\mathrm{diag}(a, \cdots, a)$ 与在对角线的上面一条是 1、而其余都是 0 的幂零矩阵可交换，所以 $x$ 等于一个对角阵再加上一个和它可交换的幂零阵. 我们可使这一分解更为精确化，如下所示.

如果 $x \in \mathrm{End}\, V$（$V$ 为有限维）在 F 上的最小多项式的根各不相同，则称 $x$ 为半单纯的. 当 F 为代数闭域时，$x$ 为半单纯当且仅当 $x$ 可对角化. 由于两个可交换的半单纯自同态可以同时化为对角形. 所以它们的和与差仍是半单纯的（练习 2）. 又，如果 $x$ 是半单纯的，且将 $V$ 的子空间 $W$ 映到自身内，则显然 $x$ 在 $W$ 上的限制也是半单纯的.

**命题** 设 $V$ 是 F 上的有限维向量空间，$x \in \mathrm{End}\, V$.

(a) 存在唯一的 $x_s, x_n \in \mathrm{End}\, V$，它们满足条件：$x = x_s + x_n$，$x_s$ 是半单纯的，$x_n$ 是幂零的，且 $x_s$ 和 $x_n$ 可交换.

(b) 存在一个不定元的多项式 $p(T)$，$q(T)$，它们没有常数项，且使得 $x_s = p(x)$，$x_n = q(x)$. 特别地，$x_s$ 和 $x_n$ 与所有能和 $x$ 交换的任一自同态可交换.

(c) 若 $A \subset B \subset V$ 是子空间，且 $x$ 将 $B$ 映入 $A$，则 $x_s$ 和 $x_n$ 也将 $B$ 映入 $A$.

分解 $x = x_s + x_n$ 称为 $x$ 的（加性）**Jordan-Chevalley 分解**，或称为 Jordan 分解，$x_s$ 和 $x_n$ 分别称为 $x$ 的**半单纯部分**与**幂零部分**.

**证** 设 $a_1, \cdots, a_k$（重数为 $m_1, \cdots, m_k$）是 $x$ 的不同特征值，于是特征多项式是 $\Pi(T - a_i)^{m_i}$. 若 $V_i = \mathrm{Ker}(x - a_i.1)^{m_i}$，则 $V$ 是子空间 $V_1, \cdots, V_k$ 的直和，且每一子空间都在 $x$ 下不变. 在 $V_i$ 上，$x$ 显然有特征多项式 $(T - a_i)^{m_i}$. 现在，应用余数定理（孙子定理）

(对环 $F[T]$) 找出一个多项式 $p(T)$，它满足一些两两互素的模的同余式：$p(T)\equiv a_i(\mathrm{mod}(T-a_i)^{m_i})$，$p(T)\equiv 0(\mathrm{mod}\, T)$．(注意：当 0 是 $x$ 的特征值时，最后一个同余式是多余的，在其它情况下，$T$ 与其它的模互素．) 置 $q(T)=T-p(T)$．因为 $p(T)\equiv 0(\mathrm{mod}\, T)$，显然 $p(T)$ 和 $q(T)$ 的常数项都是 0．

置 $x_s=p(x)$，$x_n=q(x)$．因为它们是 $x$ 的多项式，故 $x_s$ 与 $x_n$ 可互相交换，它们也与所有能和 $x$ 交换的自同态可交换．它们也使得凡是对 $x$ 不变的子空间保持不变，特别地，使 $V_i$ 不变．同余式 $p(T)\equiv a_i(\mathrm{mod}(T-a_i)^{m_i})$ 说明对所有的 $i$，$x_s-a_i.1$ 限制于 $V_i$ 上时等于 0，因此 $x_s$ 作用在 $V_i$ 上时具有单重特征值 $a_i$，从而是对角形的．由定义 $x_n=x-x_s$，显然 $x_n$ 是幂零的．由于 $p(T)$，$q(T)$ 无常数项，立刻就能得出 (c)．

余下只要证明的，是(a)的唯一性这一论断．设 $x=s+n$ 是另一个这样的分解，则有 $x_s-s=n-x_n$．根据 (b)，这里出现的自同态都是可交换的．而可交换半单纯(或幂零)自同态之和都是半单纯(或幂零)的，但只有 0 才能既是半单纯的又是幂零的．这就迫使 $s=x_s$，$n=x_n$．∎

为了指出为什么 Jordan 分解是一个有价值的工具，要看一个特殊的情形．考虑李代数 $\mathfrak{gl}(V)$ ($V$ 有限维) 的伴随表示．如果 $x\in\mathfrak{gl}(V)$ 是幂零的，则 $\mathrm{ad}\, x$ 也是幂零的(引理 3.2)．类似地，若 $x$ 是半单纯的，则 $\mathrm{ad}\, x$ 也是半单纯的．这样来证明它：选取 $V$ 的一组基 $(v_1, \cdots, v_n)$，使 $x$ 关于它的矩阵是对角形的：$\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$．设 $\{e_{ij}\}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 关于 $(v_1, \cdots, v_n)$ 的标准基 (1.2)：$e_{ij}(v_k)=\delta_{jk}v_i$．则一次迅速的计算(见(1.2)的公式(*))即可得出 $\mathrm{ad}\, x(e_{ij})=(a_i-a_j)e_{ij}$．所以 $\mathrm{ad}\, x$ 关于 $\mathfrak{gl}(V)$ 中所选取的基有对角阵．

**引理 A** 设 $x\in\mathrm{End}\, V(\dim V<\infty)$，$x=x_s+x_n$ 是它的 Jordan 分解．则 $\mathrm{ad}\, x=\mathrm{ad}\, x_s+\mathrm{ad}\, x_n$ 是 $\mathrm{ad}\, x$ 在 $\mathrm{End}(\mathrm{End}\, V)$ 内的 Jordan 分解．

**证** 我们已看到，$\mathrm{ad}\, x_s$ 和 $\mathrm{ad}\, x_n$ 分别是半单纯和幂零的，由于 $[\mathrm{ad}\, x_s, \mathrm{ad}\, x_n]=\mathrm{ad}[x_s x_n]=0$，它们又是可交换的．然后即可应用

上述命题的 (a). ∎

还有一个有用的事实是:

**引理 B** 设 $\mathfrak{A}$ 是有限维的 F-代数，则 Der $\mathfrak{A}$ 含有它的所有元素的(在 End $\mathfrak{A}$ 内的)半单纯部分与幂零部分.

**证** 若 $\delta\in\operatorname{Der}\mathfrak{A}$, 设 $\sigma$, $v\in\operatorname{End}\mathfrak{A}$ 是它的半单纯部分与幂零部分. 只要证明 $\sigma\in\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ 就够了. 若 $a\in F$, 置 $\mathfrak{A}_a=\{x\in\mathfrak{A}\mid(\delta-a.1)^k x=0$ 对某一 $k$(与 $x$ 有关)$\}$. 则 $\mathfrak{A}$ 是使得 $a$ 为 $\delta$ (或 $\sigma$) 的特征值的 $\mathfrak{A}_a$ 的直和, 且 $\sigma$ 作用在 $\mathfrak{A}_a$ 上相当于用 $a$ 的纯量乘法. 只要利用对 $x$, $y\in\mathfrak{A}$ 的一般公式:

$$(\delta-(a+b).1)^n(xy)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}((\delta-a.1)^{n-i}x)\cdot((\delta-b.1)^i y) \tag{*}$$

(对 $n$ 使用归纳法, 很易验证这个公式)即可证明对任意的 $a,b\in\mathfrak{A}$ 有 $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b\subset\mathfrak{A}_{a+b}$. 现在若 $x\in\mathfrak{A}_a$, $y\in\mathfrak{A}_b$, 则由于 $xy\in\mathfrak{A}_{a+b}$ ($xy$ 可能等于 0), 有 $\sigma(xy)=(a+b)xy$, 另一方面,

$$(\sigma x)y+x(\sigma y)=(a+b)xy.$$

因为 $\mathfrak{A}=\coprod\mathfrak{A}_a$ 是直和, 从而 $\sigma$ 是一个导子. 这就是要证明的. ∎

### 4.3. Cartan 准则

我们现在可得出一个关于李代数 $L$ 的可解性的判别准则, 它是以 $L$ 的某些自同态的迹为基础的. 显然, 如果 $[LL]$ 是幂零的, 则 $L$ 可解(这是推论 4.1C 的逆). 另一方面, 根据 Engel 定理说的: 当(且仅当)每一个 $\operatorname{ad}_{[LL]}x$ ($x\in[LL]$)为幂零时, $[LL]$ 是幂零的. 于是我们从关于一个自同态的幂零性的"迹"的判别法则着手讨论.

**引理** 设 $A\subset B$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ ($\dim V<\infty$) 的两个子空间. 置 $M=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid[x,B]\subset A\}$. 假如 $x\in M$ 对所有的 $y\in M$ 满足 $Tr(xy)=0$, 则 $x$ 是幂零的.

**证** 设 $x=s+n$ ($s=x_s$, $n=x_n$) 是 $x$ 的 Jordan 分解. 固定 $V$ 的一个基 $v_1,\cdots,v_m$, 关于它, $s$ 有矩阵 $\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_m)$. 设 $E$

是由特征值 $a_1, \cdots, a_m$ 张成的F的向量子空间(在素域 $\mathbf{Q}$ 上). 现在必须证 $s=0$, 或等价地, 证 $E=0$. 因为 $E$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是有限维的(由 $E$ 的构造可知), 只要证明对偶空间 $E^*$ 是0即可, 也就是证明任一线性函数 $f: E\to\mathbf{Q}$ 都是零.

对给定的 $f$, 设 $y$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的元素, 它关于已给基的矩阵是 $\mathrm{diag}(f(a_1), \cdots, f(a_m))$. 如果 $\{e_{ij}\}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的相应基, 我们在(4.2)中曾看到:

$$\mathrm{ad}\, s(e_{ij})=(a_i-a_j)e_{ij},\ \mathrm{ad}\, y(e_{ij})=(f(a_i)-f(a_j))e_{ij}.$$

现在设 $r(T)\in \mathrm{F}[T]$ 是没有常数项的多项式, 且对所有的 $i, j$, 满足 $r(a_i-a_j)=f(a_i)-f(a_j)$. 由 Lagrange 插值公式可知这样的 $r(T)$ 是存在的, 而且在指定的值上是不会有歧义的: 这是因为 $a_i-a_j=a_k-a_l$ 意味着(由于 $f$ 是线性的) $f(a_i)-f(a_j)=f(a_k)-f(a_l)$. 显然 $\mathrm{ad}\, y=r(\mathrm{ad}\, s)$.

由于(4.2)的引理 A, $\mathrm{ad}\, s$ 是 $\mathrm{ad}\, x$ 的半单纯部分, 所以它可以写成 $\mathrm{ad}\, x$ 的没有常数项的多项式(命题 4.2). 因此 $\mathrm{ad}\, y$ 也是 $\mathrm{ad}\, x$ 的没有常数项的多项式. 根据假设, $\mathrm{ad}\, x$ 把 $B$ 映入 $A$, 从而也有 $\mathrm{ad}\, y(B)\subset A$, 即 $y\in M$. 使用引理的假设可知 $Tr(xy)=0$, 于是得到 $\sum a_i f(a_i)=0$. 左边是 $E$ 的元素的 $\mathbf{Q}$-线性组合, 应用 $f$, 可得 $\sum f(a_i)^2=0$. 但数 $f(a_i)$ 是有理数, 所以它们都必须等于0. 最后, 因为 $a_i$ 张成了 $E$, 故 $f$ 必定恒等于0. ∎

在叙述可解准则之前, 我们要记下一个有用的等式: 若 $x, y, z$ 是有限维向量空间的自同态, 则

$$Tr([x, y]z)=Tr(x[y, z]) \tag{*}$$

要验证这一式子, 只要看 $[x, y]z=xyz-yxz$, $x[y, z]=xyz-xzy$, 再利用 $Tr(y(xz))=Tr((xz)y)$.

**定理** (Cartan 准则) 设 $L$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, $V$ 为有限维. 假如对所有的 $x\in[LL]$, $y\in L$, 总有 $Tr(xy)=0$, 则 $L$ 是可解的.

**证** 如同(4.3)开始时所指出的, 只要证明 $[LL]$ 是幂零的即可, 即只要证明 $[LL]$ 内的所有 $x$ 都是幂零自同态(引理 3.2 和 Engel 定理). 为此, 我们把上面的引理应用于以下情形: $V$ 为有限

维，$A=[LL]$，$B=L$，因而 $M=\{x\in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, L]\subset[LL]\}$．显然 $L\subset M$．根据我们的假设 $Tr(xy)=0$，对 $x\in[LL]$，$y\in L$ 成立，而为了从引理得出每个 $x\in[LL]$ 为幂零，还需要更强的条件：$Tr(xy)=0$ 对 $x\in[LL]$，$y\in M$ 成立．

现在，若 $[x, y]$ 是 $[LL]$ 的典型生成元，且若 $z\in M$，则上面的等式(*)说明了 $Tr([x, y]z)=Tr(x[y, z])=Tr([y, z]x)$．由 $M$ 的定义，$[y, z]\in[LL]$，所以根据假设可知右边等于 0．∎

**推论** 设 $L$ 是一个李代数，使 $Tr(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y)=0$ 对所有的 $x\in[LL]$，$y\in L$ 都成立，则 $L$ 是可解的．

**证** 应用上述定理于 $L$ 的伴随表示，可知 $\mathrm{ad}\, L$ 是可解的．因为 $\mathrm{Ker\, ad}=Z(L)$ 是可解的，故 $L$ 自己也是可解的(命题 3.1)．∎

## 练　习

1．设 $L=\mathfrak{sl}(V)$．使用李定理以证明 $\mathrm{Rad}\, L=Z(L)$，从而得出 $L$ 是半单纯的(见练习 2.3)．[注意：$\mathrm{Rad}\, L$ 位于 $L$ 的每一个极大可解子代数 $B$ 内．选取 $V$ 的一个基，使 $B=L\cap\mathfrak{t}(n, \mathsf{F})$，且注意到 $B$ 的转置也是 $L$ 的极大可解子代数．从而可得 $\mathrm{Rad}\, L\subset L\cap\mathfrak{d}(n, \mathsf{F})$，故 $\mathrm{Rad}\, L=Z(L)$．]

2．说明定理 4.1 的证明在素特征数的情况仍然可行，只要 $\dim V$ 小于 $\mathrm{char}\, \mathsf{F}$．

3．这一练习说明当 $\mathsf{F}$ 有素特征数 $p$ 时，李定理可能失效．考虑 $p\times p$ 矩阵：

$$x=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ y=\mathrm{diag}(0, 1, 2, 3, \cdots, p-1).$$

验证 $[x, y]=x$，于是 $x$，$y$ 张成 $\mathfrak{gl}(p, \mathsf{F})$ 的一个 2 维可解子代数 $L$．验证 $x$ 和 $y$ 没有公共特征向量．

4．当 $p=2$ 时，练习 3.3 说明了在素特征数 $p$ 的域上的自同态的可解李代数不一定具有由幂零自同态组成的导代数(见定理 4.1 的推论 C)．对任意的 $p$，如下构造推论 C 的一个反例：从练习 3 的 $L\subset\mathfrak{gl}(p, \mathsf{F})$ 出发，作向量空间的直和 $M=L+\mathsf{F}^p$，而且用下述的方法把 $M$ 变成李代数：规定 $\mathsf{F}^p$ 是 Abel

的，$L$ 仍保持它自己的乘积，$L$ 作用在 $\mathsf{F}^p$ 上就象所给出的那样．验证 $M$ 是可解的，但它的导代数（$=\mathsf{F}x+\mathsf{F}^p$）不是幂零的．

5．若 $x, y\in \mathrm{End}\,V$ 可交换，证明 $(x+y)_s=x_s+y_s$，$(x+y)_n=x_n+y_n$．举例说明若 $x, y$ 不能交换时就不一定如此．［首先证明 $x, y$ 半单纯（或幂零）意味着 $x+y$ 半单纯（或幂零）．］

6．检验(4.2)末尾的公式(*)．

7．证明定理 4.3 的逆．

8．注意到只要当 $x, y$ 取遍 $L$ 的基时检验定理 4.3（或它的推论）的假设就够了．对练习 1.2 给出的例子，通过使用 Cartan 准则验证它们的可解性．

【附注】

这里的证明是根据 Serre[1]．在线性代数群内系统地使用 Jordan 分解是 Chevalley[1] 开始的．也可见 Borel [1]，那里着重研究了李代数的加性 Jordan 分解．

## 5．Killing 型

### 5.1．半单纯性准则

设 $L$ 是任一李代数，若 $x, y\in L$，定义

$$\kappa(x, y)=Tr(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y).$$

则 $\kappa$ 是 $L$ 上的一个对称双线性型，称为 **Killing 型**．$\kappa$ 在下述意义下是结合的：$\kappa([xy], z)=\kappa(x, [yz])$．这可从 (4.3) 中记下的等式推导出来：对有限维向量空间的自同态 $x, y, z$，有

$$Tr([x, y]z)=Tr(x[y, z])$$

成立．

以后要用到下述引理：

**引理** 设 $I$ 是 $L$ 的理想，$\kappa$ 是 $L$ 的 Killing 型，$\kappa_I$ 是 $I$（被看作李代数）的 Killing 型，则 $\kappa_I=\kappa|_{I\times I}$.

**证** 首先，在线性代数里有这样一个简单事实：如果 $W$ 是（有限维）向量空间 $V$ 的一个子空间，$\phi$ 是把 $V$ 映入 $W$ 的 $V$ 的自同态，则 $Tr\,\phi=Tr(\phi|_W)$．（要证这一点，只要把 $W$ 的基扩展成 $V$ 的基，再观察 $\phi$ 的矩阵．）现在若 $x, y\in I$，则 $(\mathrm{ad}\,x)(\mathrm{ad}\,y)$ 是 $L$ 的自同态，它把 $L$ 映入 $I$，故它的迹 $\kappa(x, y)$ 与 $(\mathrm{ad}\,x)(\mathrm{ad}\,y)|_I=$

$(\mathrm{ad}_I x)(\mathrm{ad}_I y)$ 的迹 $\kappa_I(x, y)$ 相等. ∎

一般地，一个对称双线性型 $\beta(x, y)$ 的**根基** $S$ 为 $S=\{x\in L \mid \beta(x, y)=0$ 对所有 $y\in L\}$，若 $S=0$，则称 $\beta$ 为**非退化的**. 因为 Killing 型是结合的，故它的根基不仅是一个子空间，而且还是 $L$ 的一个理想. 根据线性代数，实际上检验非退化性的方法是这样的：取定 $L$ 的一组基 $x_1, \cdots, x_n$，则 $\kappa$ 为非退化的当且仅当第 $i$ 行 $j$ 列的元素是 $\kappa(x_i, x_j)$ 的 $n\times n$ 矩阵有非零行列式.

作为一个例子，我们计算 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 的 Killing 型. 使用标准基(练习 2.1)，并把它写成 $(x, h, y)$ 的次序. 这些矩阵成为：

$$\mathrm{ad}\,h=\mathrm{diag}(2, 0, -2),\ \mathrm{ad}\,x=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{ad}\,y=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

所以 $\kappa$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\\ 0 & 8 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 行列式是 $-128$，因此 $\kappa$ 是非退化的. (只要 $\mathrm{char}\,\mathsf{F}\neq 2$，这一结论总是正确的.)

回想起一个(非零)李代数 $L$ 被称为半单纯的，只要 $\mathrm{Rad}\,L=0$. 这等价于要求 $L$ 没有非零 Abel 理想：实际上，任一这样的理想必须含于根基内；而反之，在根基(如果非零)内必含有 $L$ 的这样的理想，譬如说，只要取 $\mathrm{Rad}\,L$ 的导出列的最后一个非零项即可(见练习 3.1).

**定理** 设 $L$ 是一个(非零)李代数，则 $L$ 是半单纯的当且仅当它的 Killing 型是非退化的.

**证** 首先设 $\mathrm{Rad}\,L=0$. 若 $S$ 是 $\kappa$ 的根基. 由定义，

$$Tr(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)=0$$

对所有 $x\in S$, $y\in L$(尤其是对 $y\in[SS]$)都成立. 按照 Cantan 准则 (4.3)，$\mathrm{ad}_L S$ 是可解的，从而 $S$ 是可解的. 但在上面已说过 $S$

是 $L$ 的理想，故 $S\subset \mathrm{Rad}\, L=0$，即 $\varkappa$ 是非退化的.

反之，设 $S=0$. 为了证明 $L$ 是半单纯的，只要证明 $L$ 的每个 Abel 理想含于 $S$ 内即可. 假如 $x\in I$, $y\in L$, 则 $\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y$ 映射 $L\to L\to I$, 且 $(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y)^2$ 把 $L$ 映到 $[II]=0$. 这意味着 $\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y$ 是幂零的，所以 $0=Tr(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y)=\varkappa(x, y)$，从而 $I\subset S=0$.（后半部分证明即使在素特征数的情况仍然有效(练习 6).）▌

这一证明指出了总是有 $S\subset \mathrm{Rad}\, L$，但反过来的包含不一定成立(练习 4).

## 5.2. $L$ 的单纯理想

首先给出一个定义：若 $I_1, \cdots, I_t$ 是李代数 $L$ 的理想，且 $L=I_1+\cdots+I_t$（子空间的直和），则称 $L$ 是理想 $I_1, \cdots, I_t$ 的直和. 这一条件迫使当 $i\neq j$ 时有 $[I_iI_j]\subset I_i\cap I_j=0$（从而李代数 $L$ 可被看成由李代数 $I_i$ 在向量空间直和的基础上再按分量定义李乘积而得到). 记 $L=I_1\oplus\cdots\oplus I_t$.

**定理** 若 $L$ 是半单纯的，则存在 $L$ 的理想 $L_1, \cdots, L_t$，它们都是单纯的(作为李代数)，且使得 $L=L_1\oplus\cdots\oplus L_t$. 又，$L$ 的每一个单纯理想都与 $L_i$ 中的一个重合. 此外，$L_i$ 的 Killing 型是 $\varkappa$ 在 $L_i\times L_i$ 上的限制.

**证** 作为第一步，设 $I$ 是 $L$ 的任意理想. 则由于 $\varkappa$ 的结合性，$I^\perp=\{x\in L\,|\,\varkappa(x, y)=0$ 对所有的 $y\in I\}$ 也是一个理想. 把 Cantan 准则应用到李代数 $I$ 上，可看出 $L$ 的理想 $I\cap I^\perp$ 是可解的(于是等于 0). 又因 $\dim I+\dim I^\perp=\dim L$，必定有 $L=I\oplus I^\perp$.

现在对 $\dim L$ 进行归纳以得到所需的单纯理想的直和分解. 如果 $L$ 没有非零真理想，则 $L$ 自己已是单纯的. 否则，设 $L_1$ 是极小非零理想，由上段所述，可得 $L=L_1\oplus L_1^\perp$. 特别，$L_1$ 的任一理想也是 $L$ 的理想，所以 $L_1$ 是半单纯的(由极小性，可知是单纯的). 同样的理由可知 $L_1^\perp$ 是半单纯的，根据归纳假设，它可分解成单纯理想的直和. 这些单纯理想也是 $L$ 的理想，由此即可得到 $L$ 的分解.

然后还必须证明这些单纯理想是唯一的. 如果 $I$ 是 $L$ 的任一单纯理想, 则 $[IL]$ 也是 $I$ 的理想. 因为 $Z(L)=0$, 故 $[IL]$ 是非零的, 这就必须 $[IL]=I$. 另一方面,

$$[IL]=[IL_1]\oplus\cdots\oplus[IL_t],$$

故除了一个加项外, 其余的加项必定都是 0. 假定 $[IL_i]=I$, 则 $I\subset L_i$, 且 $I=L_i$ (因为 $L_i$ 是单纯的).

定理的最后一个论断从引理 5.1 即可得到. ∎

**推论** 若 $L$ 是半单纯的, 则 $L=[LL]$, 且所有的理想以及 $L$ 的同态像都是半单纯的(或 0). 此外, $L$ 的每一理想是 $L$ 的某些单纯理想之和. ∎

## 5.3. 内 导 子

由 Killing 型的非退化性可得到一系列的重要结论. 在讲述这些结论之前, 先回忆一下练习 2.1 的结果: $\operatorname{ad} L$ 是 $\operatorname{Der} L$ 内的理想 (对任一李代数 $L$). 它的证明只依赖于简单的观察:

$$[\delta, \operatorname{ad} x]=\operatorname{ad}(\delta x), \quad x\in L,\ \delta\in\operatorname{Der} L. \qquad (*)$$

**定理** 若 $L$ 是半单纯的, 则 $\operatorname{ad} L=\operatorname{Der} L$ (即 $L$ 的每一导子都是内导子).

**证** 由于 $L$ 是半单纯的, $Z(L)=0$. 所以 $L\to\operatorname{ad} L$ 是李代数的同构. 特别地, $M=\operatorname{ad} L$ 有非退化的 Killing 型(定理 5.1). 若 $D=\operatorname{Der} L$, 根据以上(*)式可知: $[D, M]\subset M$. 这意味着(由引理 5.1) $\kappa_M$ 是 $D$ 的 Killing 型 $\kappa_D$ 在 $M\times M$ 上的限制. 特别, 若 $I=M^\perp$ 是在 $\kappa_D$ 下与 $M$ 垂直的 $D$ 的子空间, 则由 $\kappa_M$ 的非退化性, 迫使 $I\cap M=0$. 但 $I$ 和 $M$ 是 $D$ 的理想, 所以 $[I, M]=0$. 如果 $\delta\in I$, 则由 (*), 迫使 $\operatorname{ad}(\delta x)=0$ 对所有 $x\in L$ 成立, 又因为 ad 是一一的, 必须 $\delta x=0$ $(x\in L)$. 所以 $\delta=0$. 结论是: $I=0$, $\operatorname{Der} L=M=\operatorname{ad} L$. ∎

## 5.4. 抽象 Jordan 分解

定理 5.3 可被用来在任意半单纯李代数 $L$ 里引出抽象 Jordan

分解．回想起((4.2)引理 B)如果$\mathfrak{A}$是任一有限维F-代数，则 Der $\mathfrak{A}$ 包含它的一切元素在 End $\mathfrak{A}$ 里的半单纯部分与幂零部分．尤其是因为 Der $L$ 与 ad $L$ 重合(5.3)，此时 $L\to \mathrm{ad}\, L$ 是一一的，故每个 $x\in L$ 确定了唯一的 $s$, $n\in L$，使得 $\mathrm{ad}\, x=\mathrm{ad}\, s+\mathrm{ad}\, n$ 是 ad $x$ (在 End $L$ 内) 的通常的 Jordan 分解．这也意味着 $x=s+n$, $[sn]=0$, $s$ 是 ad-半单纯的(即 ad $s$ 半单纯)，$n$ 是 ad-幂零的．我们记 $s=x_s$, $n=x_n$，且称之为 $x$ 的半单纯部分和幂零部分．

细心的读者在这里可能会提出异议：当 $L$ 是线性李代数时，$x_s$, $x_n$ 会产生混淆．以后在(6.4)中将会证明，刚才得出的 $x$ 的抽象分解实际上是与这样情况下通常的 Jordan 分解相一致的．目前我们只满足于对特殊情况 $L=\mathfrak{sl}(V)$ ($V$ 为有限维)，指出上述结论是正确的．记 $x\in L$ 在 End $V$ 内的通常 Jordan 分解为 $x=x_s+x_n$．因为 $x_n$ 是幂零自同态，它的迹为 0，所以 $x_n\in L$．这使得 $x_s$ 的迹也是 0，所以 $x_s\in L$．此外 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}x_s$ 是半单纯的((4.2)的引理 A)，所以 $\mathrm{ad}_L x_s$ 更加是半单纯的．类似地，$\mathrm{ad}_L x_n$ 是幂零的，且 $[\mathrm{ad}_L x_s, \mathrm{ad}_L x_n]=\mathrm{ad}_L[x_s x_n]=0$．由于 $L$ 内抽象 Jordan 分解的唯一性，$x=x_s+x_n$ 必定就是这一分解．

## 练 习

1．证明若 $L$ 是幂零的，则 $L$ 的 Killing 型恒等于 0．

2．证明 $L$ 为可解的当且仅当 $[LL]$ 位于 Killing 型的根基内．

3．设 $L$ 是 2 维非 abelian 李代数(1.4)，它是可解的．证明 $L$ 有非平凡的 Killing 型．

4．设 $L$ 是练习 1.2 的 3 维可解李代数，计算它的 Killing 型的根基．

5．设 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$．计算 $L$ 的标准基关于 Killing 型的对偶基．

6．设 char $\mathsf{F}=p\neq 0$．证明当它的 Killing 型非退化时，$L$ 是半单纯的．举例说明反之不对．[观察当 char $\mathsf{F}=3$ 时，$\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ 关于它的中心的商代数．]

7．关于 $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ 的标准基，计算 $\kappa$ 的行列式．哪个素数能除尽它？

8．设 $L=L_1\oplus\cdots\oplus L_t$ 是半单纯李代数 $L$ 到它的单纯理想的分解．证明 $x\in L$ 的半单纯部分和幂零部分分别等于 $x$ 在各个 $L_i$ 内的分量在 $L_i$ 内的

半单纯部分与幂零部分之和.

【附注】

即使在素特征数的情形, Killing 型的非退化性也对李代数的结构有极强烈的影响. 见 Seligman[1], Pollak[1], Kaplansky[1].

## 6. 表示的完全可约性

在本节内,除去特别申明的以外,所有的表示都是有限维的.

我们将要通过伴随表示来研究半单纯李代数(见§8). 后面将会证实, $L$ 由很多个 $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$ 的同构像结集而成. 为了研究 $L$ 的这样一个3维子代数的伴随作用,我们需要关于 $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$ 的表示的更精确的信息, 这将在后面的§7内给出. 我们先证明一个关于任意半单纯李代数的表示的一个重要的一般定理(它是属于 Weyl 的).

### 6.1. 模

设 $L$ 是李代数. 在使用模的语言时, 同时也使用(等价的)表示的语言往往更方便一些. 如同在其它代数理论里一样, 有一个自然的定义. 向量空间 $V$ 被赋予一个运算 $L\times V\to V$ (记为 $(x, v)\mapsto x.v$ 或 $xv$)后, 如果满足下述条件, 则被称为一个 **$L$-模**:

(M1) $(ax+by).v=a(x.v)+b(y.v)$,

(M2) $x.(av+bw)=a(x.v)+b(x.w)$,

(M3) $[xy].v=x.y.v-y.x.v$.

$$(x,\ y\in L;\ v,\ w\in V;\ a,\ b\in \mathrm{F}).$$

例如, 若 $\phi: L\to\mathfrak{gl}(V)$ 是 $L$ 的表示, 则 $V$ 可以看作一个 $L$-模: $x.v=\phi(x)(v)$. 反之, 给出一个 $L$-模 $V$, 这一等式定义了一个表示: $\phi: L\to\mathfrak{gl}(V)$.

$L$-模同态是一个线性映射 $\phi: V\to W$, 使得 $\phi(x.v)=x.\phi(v)$. 这样一个同态的核就是 $V$ 的一个 $L$-子模(而且标准同态定理完全可以适用). 当 $\phi$ 又是向量空间同构时, 我们称它为 **$L$-模同构**. 此时, 就说这两个模提供了 $L$ 的等价表示. $L$-模 $V$ 如果只有两

个子模(它本身与0)，则称为**不可约的**. 我们不把零维向量空间看作不可约的 $L$-模. 但被 $L$ 作用于其上的(可能是平凡的)一维空间却可被称为不可约的. 如果 $V$ 是不可约的 $L$-子模的直和，或等价地(练习2)，$V$ 的每一个 $L$-子模 $W$ 有一个余子模 $W'$ (即使得 $V=W\oplus W'$ 的 $L$-子模)，则称 $V$ 为**完全可约的**. 当 $W$, $W'$ 是任意 $L$-模时，我们当然能把它们的直和作成一个 $L$-模，即定义 $x.(w, w')=(x.w, x.w')$. 这些概念都是标准的，且当 $\dim V=\infty$ 时也有意义. 当然，术语"不可约"与"完全可约"被等价地应用于 $L$ 的表示上.

给出了一个表示 $\phi: L\to \mathfrak{gl}(V)$，则由 $\phi(L)$ 在 $\operatorname{End} V$ 内生成的结合代数(带1)使得所有关于 $L$ 不变的子空间保持不变. 因而关于结合环上的模的所有通常的结果(譬如 Jordan-Hölder 定理)对 $L$ 仍适用. 为了以后的使用，我们复述一下著名的 Schur 引理.

**Schur 引理** 设 $\phi: L\to \mathfrak{gl}(V)$ 是不可约的，则能与所有 $\phi(x)(x\in L)$ 交换的 $V$ 的自同态只有纯量. ▮

关于伴随表示，$L$ 自己就是 $L$-模. $L$-子模就是一个理想. 所以单纯代数 $L$ 作为 $L$-模是不可约的，而半单纯代数是完全可约的(定理5.2).

为了以后的使用，我们要提一下两种从旧的 $L$-模作出新的 $L$-模的方法. 设 $V$ 是 $L$-模，则对偶空间 $V^*$ 也可变成 $L$-模(称为**对偶模**或**反轭模**)，这时我们对 $f\in V^*$, $v\in V$, $x\in L$ 定义

$$(x.f)(v)=-f(x.v).$$

公理(M1)，(M2)是明显的. 现在检验(M3)：

$$\begin{aligned}([xy].f)(v)&=-f([xy].v)\\&=-f(x.y.v-y.x.v)\\&=-f(x.y.v)+f(y.x.v)\\&=(x.f)(y.v)-(y.f)(x.v)\\&=-(y.x.f)(v)+(x.y.f)(v)\\&=((x.y-y.x).f)(v).\end{aligned}$$

若 $V$, $W$ 是 $L$-模，令 $V\otimes W$ 是底向量空间在 $\mathsf{F}$ 上的张量积.

回忆起当 $V$, $W$ 有基 $(v_1, \cdots, v_m)$ 和 $(w_1, \cdots, w_n)$ 时, 则 $V\otimes W$ 有一个由 $mn$ 个向量 $v_i\otimes w_j$ 构成的基. 读者可能知道, 从群 $G$ 的两个模如何给出它们的张量积的模结构: 在生成元 $v\otimes w$ 上, 要求 $g.(v\otimes w)=g.v\otimes g.w$. 而对于李代数, 正确的定义是通过对它"微分"而得到的: $x.(v\otimes w)=x.v\otimes w+v\otimes x.w$. 与前面一样, 要验证的关键公理是 (M3):

$$\begin{aligned}[xy].(v\otimes w)&=[xy].v\otimes w+v\otimes[xy].w\\&=(x.y.v-y.x.v)\otimes w+v\otimes(x.y.w-y.x.w)\\&=(x.y.v\otimes w+v\otimes x.y.w)\\&\quad-(y.x.v\otimes w+v\otimes y.x.w).\end{aligned}$$

展开 $(x.y-y.x).(v\otimes w)$ 可得到同样的结果.

给出 F 上一个向量空间 $V$ 后, 存在一个标准的 (且非常有用的) 向量空间的同构: $V^*\otimes V\to \operatorname{End} V$, 它把典型生成元 $f\otimes v$ $(f\in V^*,\ v\in V)$ 对应到一个自同态, 此自同态在 $w\in V$ 上的值是 $f(w)v$. 要证明这确实建立了一个满同态 $V^*\otimes V\to\operatorname{End} V$ 只不过是一件例行公事(使用对偶基). 由于两边的维数都是 $n^2$ $(n=\dim V)$, 它必定是一个同构.

现在如果 $V$ (从而 $V^*$) 还是关于加法的一个 $L$-模, 则 $V^*\otimes V$ 按上述做法构成一个 $L$-模. 因而通过同构表示, 也能把 $\operatorname{End} V$ 看作一个 $L$-模. $L$ 作用在 $\operatorname{End} V$ 上也可直接描述如下:

$$(x.f)(v)=x.f(v)-f(x.v),\quad x\in L,\ f\in\operatorname{End} V,\ v\in V$$

(请验证!). 更一般地, 若 $V$ 和 $W$ 是两个 $L$-模, 则 $L$ 作用在线性映射的空间 $\operatorname{Hom}(V, W)$ 上的规则为:

$$(x.f)(v)=x.f(v)-f(x.v).$$

(这来源于 $\operatorname{Hom}(V, W)$ 与 $V^*\otimes W$ 之间的同构.)

## 6.2. 表示的 Casimir 元素

在 §5 中我们利用了可解性的 Cantan 准则以证明半单纯李代数有非退化的 Killing 型. 更一般地, 设 $L$ 是半单纯的, 且 $\phi: L\to \mathfrak{gl}(V)$ 是 $L$ 的一一表示. 定义 $L$ 上的一个对称双线性型

$$\beta(x, y)=Tr(\phi(x)\phi(y)).$$

由于(4.3)的等式(*)，型$\beta$是结合的，所以它的根基$S$是$L$的一个理想．此外，$\beta$是非退化的：事实上定理4.3已证明了$\phi(S)\cong S$是可解的，所以$S=0$．（对$\phi=\mathrm{ad}$的特殊情形，Killing型就是$\beta$.）

现在设$L$是半单纯的，$\beta$是$L$上的任一非退化对称结合双线性型．若$(x_1, \cdots, x_n)$是$L$的一个基，则存在关于$\beta$的唯一确定的对偶基$(y_1, \cdots, y_n)$，满足$\beta(x_i, y_j)=\delta_{ij}$．若$x\in L$，则可以记

$$[xx_i]=\sum_j a_{ij}x_j,$$

且$[xy_i]=\sum_j b_{ij}y_j$．利用$\beta$的结合性，我们作以下计算：

$$a_{ik}=\sum_j a_{ij}\beta(x_j, y_k)=\beta([xx_i], y_k)=\beta(-[x_ix], y_k)$$
$$=\beta(x_i, -[xy_k])=-\sum_j b_{kj}\beta(x_i, y_j)=-b_{ki}.$$

设$\phi: L\to \mathfrak{gl}(V)$是$L$的任一表示，记

$$c_\phi(\beta)=\sum_i \phi(x_i)\phi(y_i)\in \mathrm{End}\, V$$

（$x_i$, $y_i$跑遍关于$\beta$的对偶基）．利用等式（在$\mathrm{End}\, V$内）$[x, yz]=[x, y]z+y[x, z]$以及$a_{ik}=-b_{ki}$（对$x\in L$），可得：

$$[\phi(x), c_\phi(\beta)]=\sum_i [\phi(x), \phi(x_i)]\phi(y_i)$$
$$+\sum_i \phi(x_i)[\phi(x), \phi(y_i)]$$
$$=\sum_{i,j} a_{ij}\phi(x_j)\phi(y_i)+\sum_{i,j} b_{ij}\phi(x_i)\phi(y_j)=0.$$

换句话说，$c_\phi(\beta)$是与$\phi(L)$可交换的$V$的自同态．

把上面的话归在一起，设$\phi: L\to\mathfrak{gl}(V)$是一一表示，具有（非退化的）迹型$\beta(x, y)=Tr(\phi(x)\phi(y))$．此时，取定$L$的一个基$(x_1, \cdots, x_n)$后，把$c_\phi(\beta)$简写为$c_\phi$，且称它为$\phi$的**Casimir元素**．它的迹是$\sum_i Tr(\phi(x_i)\phi(y_i))=\sum_i \beta(x_i, y_i)=\dim L\neq 0$．当$\phi$为不可约时，由Schur引理(6.1)可知$c_\phi$是一个纯量（等于$\dim L/\dim V$），此时可以看到$c_\phi$与所选取的$L$的基无关．

**例** $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$，$V=\mathsf{F}^2$，$\phi$是恒等映射$L\to\mathfrak{gl}(V)$．设$(x, h,$

$y$) 是 $L$ 的标准基(2.1). 这立即可看出: 关于迹型的对偶基是$\left(y, \frac{1}{2}h, x\right)$, 所以

$$c_\phi = xy + \frac{1}{2}h^2 + yx = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

注意 $3/2 = \dim L / \dim V$.

当 $\phi$ 不是一一表示时, 需要作微小的改变. $\mathrm{Ker}\phi$ 是 $L$ 的一个理想, 所以是某些单纯理想之和(推论 5.2). 用 $L'$ 表示余下的单纯理想之和(定理 5.2). 这样 $\phi$ 限制于 $L'$ 上是 $L'$ 的一一表示, 然后我们再按上述的做法进行构造(使用 $L'$ 的对偶基), 所得的 $\mathrm{End}\, V$ 的元素仍称为 $\phi$ 的 Casimir 元素, 记为 $c_\phi$. 显然它与 $\phi(L) = \phi(L')$ 可交换.

最后要讲一句: 为方便起见, 假定我们遇到的是 $L$ 的一一表示, 这相当于研究 $L$ 的某个(半单纯)理想的表示. 若 $L$ 是单纯的, 那末只有一维模(此时 $L$ 的作用是平凡的)或模 0 才不是一一的.

## 6.3. Weyl 定理

**引理** 设 $\phi: L \to \mathfrak{gl}(V)$ 是一个半单纯李代数 $L$ 的表示, 则 $\phi(L) \subset \mathfrak{sl}(V)$. 特别地, $L$ 在任一个一维模上的作用是平凡的.

**证** 利用 $L = [LL]$ (5.2) 以及 $\mathfrak{sl}(V)$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的导代数这些事实. ▌

**定理(Weyl)** 设 $\phi: L \to \mathfrak{gl}(V)$ 是一个半单纯李代数的(有限维)表示, $V \neq 0$. 则 $\phi$ 是完全可约的.

**证** 我们先从 $V$ 有一个余维数为 1 的 $L$-子模 $W$ 这一特殊情形着手讨论. 由引理, $L$ 作用在 $V/W$ 上是平凡的, 我们可把这个模记为 $\mathsf{F}$ 而不致引起读者误解: 于是 $0 \to W \to V \to \mathsf{F} \to 0$ 是正合的. 对 $W$ 的维数应用归纳法, 能够把这一情形化简到 $W$ 为不可约 $L$-模的情形. 可以这样约化: 设 $W'$ 是 $W$ 的非零真子模, 这样就得到一个正合序列: $0 \to W/W' \to V/W' \to \mathsf{F} \to 0$. 由归纳假设, 这

一序列是“分裂”的，即存在 $V/W'$ 的一维 $L$-子模（记为 $\widetilde{W}/W'$），它是 $W/W'$ 的余子模．这样我们得到另一个正合序列：$0\to W'\to\widetilde{W}\to F\to 0$．这一情形类似于原始的情况，只不过 $\dim W'<\dim W$．所以归纳假设就给出了一个（一维）子模 $X$，它在 $\widetilde{W}$ 内是 $W'$ 的余子模：$\widetilde{W}=W'\oplus X$．但

$$V/W'=W/W'\oplus\widetilde{W}/W'.$$

因此 $V=W\oplus X$．这是因为它们的维数之和等于 $\dim V$，且

$$W\cap X=0.$$

现在我们可假设 $W$ 是不可约的（不失一般性，也可假设 $L$ 作用在 $V$ 上是一一的）．设 $c=c_\phi$ 是 $\phi$ 的 Casimir 元素 (6.2)．因为 $c$ 与 $\phi(L)$ 可交换，$c$ 实际上是 $V$ 的 $L$-模自同态，特别地，$c(W)\subset W$ 且 $\operatorname{Ker} c$ 是 $V$ 的 $L$-子模．因为 $L$ 作用在 $V/W$ 上是平凡的（即 $\phi(L)$ 把 $V$ 映入 $W$），$c$ 也必须如此（它是元素 $\phi(x)$ 的乘积的线性组合）．所以 $c$ 在 $V/W$ 上的迹是 0．另一方面，$c$ 作用在不可约 $L$-模 $W$ 上相当于一个纯量 (Schur 引理)．这一纯量不能等于 0，否则就迫使 $Tr_V(c)=0$，这与 (6.2) 的结论相矛盾．所以 $\operatorname{Ker} c$ 是 $V$ 的一维 $L$-子模，它与 $W$ 的交只有 0．这正是我们所需要的 $W$ 的余子模．

现在我们可以转向一般情形．假设 $W$ 是 $V$ 的任一子模：$0\to W\to V\to V/W\to 0$．设 $\operatorname{Hom}(V, W)$是线性映射 $V\to W$ 的空间，看作一个 $L$-模 (6.1)．设 $\mathscr{V}$ 是 $\operatorname{Hom}(V, W)$ 的一个子空间，它由限制在 $W$ 上相当于纯量乘法的映射所构成．$\mathscr{V}$ 实际上是一个 $L$-子模：若 $f|_W=a.1_W$，则对 $x\in L$，$w\in W$，

$$(x.f)(w)=x.f(w)-f(x.w)=a(x.w)-a(x.w)=0,$$

所以 $x.f|_W=0$．设 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{V}$ 的子空间，它由限制在 $W$ 上等于 0 的映射 $f$ 所组成．则上面的计算证明了 $\mathscr{W}$ 也是一个 $L$-子模，而且 $L$ 把 $\mathscr{V}$ 映入 $\mathscr{W}$．此外 $\mathscr{V}/\mathscr{W}$ 的维数是 1，这是因为每一个 $f\in\mathscr{V}$ 由一个纯量 $f|_W$ 所确定（关于模 $\mathscr{W}$）．这样我们恰好得到了前面已处理过的特殊情形：$0\to\mathscr{W}\to\mathscr{V}\to F\to 0$．

按照证明的第一部分，$\mathscr{V}$ 有一个 $\mathscr{W}$ 的一维余子模．设它由

$f:V\to W$ 所张成，则乘以非零纯量后，我们可假设 $f|_W=1_W$. 谓 $L$ 零化 $f$ 就等于说 $0=(x.f)(v)=x.f(v)-f(x.v)$，即 $f$ 是一个 $L$-同态. 所以 $\mathrm{Ker}f$ 是 $V$ 的 $L$-子模. 因为 $f$ 把 $V$ 映入 $W$，且在 $W$ 上的作用相当于 $1_W$，因此推得 $V=W\oplus\mathrm{Ker}f$. 这正是要求证的. ∎

## 6.4. Jordan 分解的保持

Weyl 定理对于研究半单纯李代数 $L$ 的表示当然是基本的. 这里我们要给出一个更直接的应用，即要证明抽象的 Jordan 分解 (5.4) 是与 $L$ 的各种线性表示相容的.

**定理** 设 $L\subset\mathfrak{gl}(V)$ 是半单纯线性李代数 ($V$ 为有限维的). 则 $L$ 含有它的所有元素在 $\mathfrak{gl}(V)$ 内的半单纯部分与幂零部分. 特别地，$L$ 的抽象 Jordan 分解与通常的 Jordan 分解是一致的.

**证** 后一个断言可从前一个断言推得，因为各个类型的 Jordan 分解是唯一的 (4.2, 5.4).

设 $x\in L$ 是任意的，在 $\mathfrak{gl}(V)$ 内有 Jordan 分解 $x=x_s+x_n$. 只要证明 $x_s$, $x_n$ 在 $L$ 内就够了. 因为 $\mathrm{ad}\,x(L)\subset L$，所以由命题 4.2(c)，$\mathrm{ad}\,x_s(L)\subset L$，$\mathrm{ad}\,x_n(L)\subset L$，这里 $\mathrm{ad}=\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}$. 换句话说，$x_s$, $x_n\in N_{\mathfrak{gl}(V)}(L)=N$，它是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个李子代数，且含有 $L$ 作为理想. 如果我们能证 $N=L$，那么问题就解决了. 然而，这是办不到的. 因为 $L\subset\mathfrak{sl}(L)$ (引理 6.3) 而纯量含于 $N$ 内但不在 $L$ 内. 所以我们要使 $x_s$, $x_n$ 位于比 $N$ 更小的子代数内，而且这个子代数又能被证明等于 $L$. 如果 $W$ 是 $V$ 的任一个 $L$-子模，定义

$$L_W=\{y\in\mathfrak{gl}(V)\mid y(W)\subset W,\ \text{且}\ Tr(y|_W)=0\}.$$

例如，$L_V=\mathfrak{sl}(V)$. 因为 $L=[LL]$，显然 $L$ 位于所有这样的 $L_W$ 内. 设 $L'$ 是 $N$ 与所有这样的空间 $L_W$ 的交集. 显然 $L'$ 是 $N$ 的子代数，它包含 $L$ 作为理想 (但请注意：$L'$ 并不包含纯量). 不仅如此，而且当 $x\in L$ 时，$x_s$, $x_n$ 也在 $L_W$ 内，从而在 $L'$ 内.

余下的是证明 $L=L'$. $L'$ 是一个有限维 $L$-模，Weyl 定理

(6.3) 允许我们写成 $L^{*}=L+M$, 其中 $M$ 是 $L$-子模, 并且这是直和. 但 $[L, L^{*}]\subset L$ (因为 $L^{*}\subset N$), 所以 $L$ 作用在 $M$ 上是平凡的. 令 $W$ 是 $V$ 的任一不可约 $L$-子模. 若 $y\in M$, 则 $[L, y]=0$, 故根据 Schur 引理可知, $y$ 作用在 $W$ 上相当于一个纯量. 而另一方面, 由于 $y\in L_W$, $Tr(y|_W)=0$. 所以 $y$ 作用在 $W$ 上相当于 0. 因为 $V$ 可写成不可约的 $L$-子模的直和(根据 Weyl 定理), 于是 $y=0$. 这就意味着 $M=0$, 所以 $L=L^{*}$. ▮

**推论** 设 $L$ 是半单纯李代数, $\phi: L\to \mathfrak{gl}(V)$ 是 $L$ 的一个(有限维)表示. 若 $x=s+n$ 是 $x\in L$ 的抽象 Jordan 分解, 则 $\phi(x)=\phi(s)+\phi(n)$ 是 $\phi(x)$ 的通常 Jordan 分解.

**证** 因为 $L$ 由 $\mathrm{ad}\, s$ 的特征向量张成, 故代数 $\phi(L)$ 关于 $\mathrm{ad}_{\phi(L)}\phi(s)$ 也有此性质, 从而 $\mathrm{ad}_{\phi(L)}\phi(s)$ 是半单纯的. 类似地, $\mathrm{ad}_{\phi(L)}\phi(n)$ 是幂零的, 且与 $\mathrm{ad}_{\phi(L)}\phi(s)$ 可交换. 因而 $\phi(x)=\phi(s)+\phi(n)$ 是 $\phi(x)$ 在半单纯李代数 $\phi(L)$ 内的抽象约当分解 (5.4). 应用上述定理, 就能得到所需的结论. ▮

## 练 习

1. 利用 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 的标准基, 写出 $L$ 的伴随表示的 Casimir 元素(见练习 5.5). 对 $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ 的常规 (3 维)表示, 先计算关于迹型的对偶基, 然后写出 Casimir 元素.

2. 设 $V$ 是 $L$-模. 证明 $V$ 是不可约子模的直和当且仅当 $V$ 的每一 $L$-子模具有一个余子模.

3. 若 $L$ 是可解的, 则 $L$ 的每个不可约表示是一维的.

4. 使用 Weyl 定理给出下述的定理 5.3 的另一个证明: 若 $L$ 半单纯, 则 $\mathrm{ad}\, L=\mathrm{Der}\, L$. [若 $\delta\in \mathrm{Der}\, L$, 把直和 $\mathsf{F}+L$ 如下地作成一个 $L$-模: $x.(a, y)=(0, a\delta(x)+[x, y])$. 然后考虑子模 $L$ 的余子模.]

5. 若李代数 $L$ 内成立等式 $\mathrm{Rad}\, L=Z(L)$, 则称 $L$ 为简约的. (例: $L$ 阿贝耳, $L$ 半单纯, $L=\mathfrak{gl}(n, \mathsf{F})$ 都是简约李代数.)

(a) 若 $L$ 是简约的, 则 $L$ 是完全可约 $\mathrm{ad}\, L$-模. [若 $\mathrm{ad}\, L\neq 0$, 使用 Weyl 定理.] 特别地, $L$ 是 $Z(L)$ 和 $[LL]$ 的直和, 且 $[LL]=0$ 或半单纯.

(b) 若 $L$ 是典型线性李代数(1.2), 则 $L$ 是半单纯的. [参看练习1.9.]

(c) 若 $L$ 是完全可约 ad $L$-模，则 $L$ 是简约的.

(d) 若 $L$ 是简约的，则使得 $Z(L)$ 被表示成半单纯自同态 $L$ 的有限维表示都是完全可约的.

6. 设 $L$ 是单纯李代数. $\beta(x, y)$ 和 $\gamma(x, y)$ 是 $L$ 上两个对称结合双线性型. 若 $\beta$, $\gamma$ 是非退化的，证明 $\beta$ 和 $\gamma$ 成比例. [应用 Schur 引理.]

7. 以后将看到 $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ 实际上是单纯的. 根据这一点，再利用练习 6，证明 $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ 上的 Killing 型 $\kappa$ 与通常的迹型的关系是: $\kappa(x, y)=2nTr(x, y)$.

8. 若 $L$ 是李代数，则 $L$(通过 ad) 作用在 $(L\otimes L)^*$ 上，后者可与 $L$ 上所有的双线性型 $\beta$ 的空间等同. 证明: $\beta$ 为结合的，当且仅当 $L.\beta=0$.

9. 设 $L'$ 是半单纯李代数 $L$ 的半单纯子代数. 若 $x\in L'$，则它在 $L'$ 内的 Jordan 分解也是它在 $L$ 内的 Jordan 分解.

【附注】

Weyl 定理的证明取自 Serre[1]. 原始的证明完全不同，它使用的是紧致李群上的积分. 参见 Freudenthal, de Vries[1]. 定理 6.4 是按照 Bourbaki[1].

## 7. $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 的表示

在本节内(如同 § 6)，所有的模均假定为在 $\mathsf{F}$ 上有限维的. $L$ 代表 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$，它的标准基为:

$$x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ h=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

(例 2.1). 则 $[hx]=2x$, $[hy]=-2y$, $[xy]=h$.

### 7.1. 权与极大向量

设 $V$ 是任意 $L$-模. 因为 $h$ 是半单纯的，推论 6.4 意味着 $h$ 对角地作用在 $V$ 上. ($\mathsf{F}$ 是代数闭的假设已保证了所需的特征值都在 $\mathsf{F}$ 内.) 这样就导致 $V$ 的分解为特征空间 $V_\lambda=\{v\in V \mid h.v=\lambda v\}$, $\lambda\in\mathsf{F}$ 的直和. 当然，若 $\lambda$ 不是表示 $h$ 的 $V$ 的自同态的特征值时，子空间 $V_\lambda$ 仍有意义(而且是 0). 当 $V_\lambda\neq 0$ 时，则称 $\lambda$ 是 $h$ 在 $V$ 内的一个权，且称 $V_\lambda$ 为权空间.

**引理** 若 $v\in V_\lambda$，则 $x.v\in V_{\lambda+2}$, $y.v\in V_{\lambda-2}$.

证 $h.(x.v)=[h, x].v+x.h.v=2x.v+\lambda x.v=(\lambda+2)x.v.$ 对 $y$ 可类似证明. ▌

**评论** 这一引理意味着 $x, y$ 被 $V$ 的幂零自同态所表示，但这从定理 6.4 已可得到.

由于 $\dim V<\infty$, $V=\coprod_{\lambda\in F} V_\lambda$ 是直和，故必定存在 $V_\lambda\neq 0$ 使 $V_{\lambda+2}=0$. (根据引理，对任一 $v\in V_\lambda$, $x.v=0$.) 对于这一个 $\lambda$, $V_\lambda$ 内的任一非零向量被称为权 $\lambda$ 的极大向量.

## 7.2. 不可约模的分类

现在假设 $V$ 是不可约 $L$-模. 选一个极大向量 $v_0\in V_\lambda$. 置 $v_{-1}=0$, $v_i=(1/i!)y^i.v_0(i\geqslant 0)$.

**引理** (a) $h.v_i=(\lambda-2i)v_i$,

(b) $y.v_i=(i+1)v_{i+1}$,

(c) $x.v_i=(\lambda-i+1)v_{i-1}\quad(i\geqslant 0)$.

证 重复应用引理 7.1 即可得出 (a). (b) 就是定义. 为证 (c), 对 $i$ 使用归纳法. $i=0$ 的情形是显然的(因为已约定 $v_{-1}=0$). 再看下面:

$$\begin{aligned}
ix.v_i&=x.y.v_{i-1} &&\text{(由定义)}\\
&=[x, y].v_{i-1}+y.x.v_{i-1}\\
&=h.v_{i-1}+y.x.v_{i-1}\\
&=(\lambda-2(i-1))v_{i-1}+(\lambda-i+2)y.v_{i-2}\\
& &&\text{(由(a)及归纳假设)}\\
&=(\lambda-2i+2)v_{i-1}+(i-1)(\lambda-i+2)v_{i-1} &&\text{(由(b))}\\
&=i(\lambda-i+1)v_{i-1}.
\end{aligned}$$

两边约去 $i$ 即得 (c). ▌

由于公式 (a), 非零的 $v_i$ 都是线性无关的. 但已知 $\dim V<\infty$. 设 $m$ 是使得 $v_m\neq 0$, $v_{m+1}=0$ 的最小整数，显然对所有的 $i>0$ 都有 $v_{m+i}=0$. 据此，再加上公式 (a) ~ (c), 可看出以 $(v_0, v_1, \cdots, v_m)$ 为基的 $V$ 的子空间是一个异于零的 $L$-子模. 因为 $V$ 是不可约的，这个子空间就是 $V$. 此外，关于有序基 $(v_0, v_1, \cdots,$

$v_m$)，可把 $x$, $y$, $h$ 的表示自同态的矩阵明显地写出来. 请注意 $h$ 对应于对角阵，而 $x$, $y$ 分别对应于上三角及下三角幂零阵.

更仔细地观察公式 (c) 后，可揭示出一个引人注目的事实：当 $i=m+1$ 时，左边是 0，而右边是 $(\lambda-m)v_m$. 由于 $v_m\neq 0$，所以 $\lambda=m$. 换句话说，极大向量的权是一个非负整数(比 $\dim V$ 小 1). 我们称它为 $V$ 的首权. 此外，由公式 (a)，每一个权 $\mu$ 是单重的 (即若 $V_\mu\neq 0$ 时，$\dim V_\mu=1$). 特别是因为 $V$ 唯一地确定了 $\lambda$ $(\lambda=\dim V-1)$，极大向量 $v_0$ 在 $V$ 内只有一种可能(不计非零纯量因子). 概括起来，得：

**定理** 设 $V$ 是 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 的一个不可约模.

(a) $V$ 是关于 $h$ 的权空间 $V_\mu$ 的直和：$\mu=m, m-2, \cdots, -(m-2), -m$，其中 $m+1=\dim V$，且对每个 $\mu$，有 $\dim V_\mu=1$.

(b) $V$ 具有唯一的(不计非零纯量因子)极大向量，它的权(称为 $V$ 的首权)是 $m$.

(c) 如果按前面规定的方式选取基向量，则 $L$ 在 $V$ 上的作用由前述公式明显地给出. 特别是对于每一个可能的维数 $m+1$, $m\geqslant 0$，在同构意义下至多只能存在一个不可约 $L$-模. ∎

**推论** 设 $V$ 是任一(有限维) $L$-模，$L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. 则 $h$ 在 $V$ 上的特征值全是整数，而且每个特征值都与它的相反数同时出现(且出现次数相同). 此外，在 $V$ 到不可约子模的直和分解中，加项的个数恰好是 $\dim V_0+\dim V_1$.

**证** 若 $V=0$，就不需证明了. 否则，使用 Weyl 定理 (6.3) 把 $V$ 写成不可约子模的直和. 后者已由上面定理所描述，所以推论的第一个断言是显然的. 对于第二个断言，只要看到在每一个不可约 $L$-模中，权 0 或权 1 总要出现一次(但不可能两者同时出现). ∎

假若单为了本章的目的，上述的定理和推论已经足够了. 不过，如果在未曾探究一下对于每一种可能的首权 $m=0, 1, 2, \cdots$，是否确实存在一个不可约 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 模之前，就要离开这一题目，是不大合乎情理的. 当然，我们已经知道在低维的情形如何构造合

适的模：平凡模(1 维)，自然表示(2 维)，伴随表示(3 维)．至于对任意的 $m\geqslant 0$，引理 7.2 的公式 (a)～(c) 可被用来在 F 上以 $(v_0, v_1, \cdots, v_m)$ 为基的 $m+1$ 维向量空间上定义 $L$ 的一个不可约表示，称为 $V(m)$．像惯常所作的那样，这一验证留给读者去作(练习 3)．(关于一般的存在定理，见后面的 (20.3)．)

更深入地观察一下：如果我们利用 (2.3) 内对指数映射的讨论，那么 $V(m)$ 的结构的对称性就更加明显了．设 $\phi: L\to \mathfrak{gl}(V(m))$ 是首权为 $m$ 的不可约表示．则由前述公式即可看出 $\phi(x)$，$\phi(y)$ 是幂零自同态，从而我们可定义 $V(m)$ 的一个自同构：$\tau=\exp\phi(x)\exp\phi(-y)\exp\phi(x)$．我们还可假定 $m>0$，于是这个表示是一一的(因 $L$ 是单纯的)．在(2.3)的讨论中已证明，用 $\tau$ 对 $\phi(h)$ 作共轭就相当于用 $\exp(\operatorname{ad}\phi(x))\exp(\operatorname{ad}\phi(-y))\exp(\operatorname{ad}\phi(x))$ 作用于 $\phi(h)$ 上，两者的效果是一致的．但 $\phi(L)$ 同构于 $L$，因而这可以如同(2.3)内一样被计算．结论是：

$$\tau\phi(h)\tau^{-1}=-\phi(h),\ 或\ \tau\phi(h)=-\phi(h)\tau.$$

由此我们立即可看出，$\tau$ 把权为 $m-2i$ 的基向量 $v_i$ 变成权为 $-(m-2i)$ 的基向量 $v_{m-i}$．(但在 (2.3) 的讨论限制于特殊情形 $m=1$．)更一般地，若 $V$ 为任一有限维 $L$-模，则 $\tau$ 把正负权空间互相交换．

## 练　习

(在以下练习中，$L=\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$．)

1．使用李定理证明：在任意有限维 $L$-模内，存在极大向量．[观察由 $h$ 和 $x$ 张成的子代数 $B$．]

2．在 $M=\mathfrak{sl}(3, \mathrm{F})$的左上角 $2\times 2$ 子块内含有一个 $L$ 的同构像(*)．把 $M$ 写成不可约 $L$-模的直和($M$ 通过伴随表示看作 $L$-模)：

$$V(0)\oplus V(1)\oplus V(1)\oplus V(2).$$

3．验证：引理 7.2 的公式 (a)～(c) 确实定义了 $L$ 的一个不可约表示．[要证明它们定义一个表示，只需证明对应于 $x, y, h$ 的矩阵满足与 $x, y, h$ 同样的结构方程．]

(*) 译者注：把除左上角的 $2\times 2$ 子块外，其余子块都是 0 的矩阵等同于 $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$．

4. 首权 $m$ 的 $L$ 的不可约表示也可如下"自然地"实现：设 $X$, $Y$ 是 2 维向量空间 $\mathsf{F}^2$ 的基，$L$ 在其上的作用就如同由 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 的矩阵所定义的那样. 设 $\mathscr{R}=\mathsf{F}[X, Y]$ 是两个变量的多项式代数，且利用以下的求导规则，把 $L$ 的作用扩张到 $\mathscr{R}$ 上：$z.fg=(z.f)g+f(z.g)$, $z\in L$, $f$, $g\in\mathscr{R}$. 证明这一扩张是完全确定的，并且 $\mathscr{R}$ 成为 $L$-模. 然后再证明以 $X^m$, $X^{m-1}Y$, $\cdots$, $XY^{m-1}$, $Y^m$ 为基的 $m$ 次齐次多项式所成的子空间在 $L$ 下不变，而且是不可约的，首权为 $m$.

5. 假设 $\operatorname{char}\mathsf{F}=p>0$, $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. 证明按练习 3 或 4 所构造的 $L$ 的表示 $V(m)$ 当 $m$ 严格小于 $p$ 时为不可约的，而当 $m=p$ 时为可约的.

6. 把两个 $L$-模 $V(3)$, $V(7)$ 的张量积分解成不可约子模之和：$V(4)\oplus V(6)\oplus V(8)\oplus V(10)$. 试对 $V(m)\otimes V(n)$ 的分解推广成一个一般的公式.

7. 在这个练习里，我们构造一个无限维 $L$-模. 设 $\lambda\in\mathsf{F}$ 是任意纯量，$Z(\lambda)$ 是 $\mathsf{F}$ 上向量空间，具有可数无限基 $(v_0, v_1, v_2, \cdots)$.

(a) 证明引理 7.2 的公式 (a)～(c) 在 $Z(\lambda)$ 上定义了一个 $L$-模结构，而且 $Z(\lambda)$ 的每个非零 $L$-子模至少包含一个极大向量.

(b) 假设 $\lambda+1=i$ 是非负整数. 证明 $v_i$ 是一个极大向量（例如：$\lambda=-1$, $i=0$）. 它诱导了把 $v_0$ 映成 $v_i$ 的一个 $L$-模同态 $Z(\mu)\xrightarrow{\phi}Z(\lambda)$, $\mu=\lambda-2i$. 证明 $\phi$ 是单一同态，且 $\operatorname{Im}\phi$, $Z(\lambda)/\operatorname{Im}\phi$ 都是不可约的 $L$-模（但当 $i>0$ 时，$Z(\lambda)$ 不是完全可约的）.

(c) 假定 $\lambda+1$ 不是非负整数，证明 $Z(\lambda)$ 是不可约的.

## 8. 根空间分解

在本节内 $L$ 始终代表一个半单纯李代数. 我们将通过它的伴随表示详细地研究 $L$ 的结构. 使用的主要方法是 Killing 型以及定理 6.4, 7.2（它们都依赖于 Weyl 定理）. 读者需牢记特例 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$（或更一般地，$\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$），以作为前进的向导.

### 8.1. 极大环面子代数与根

如果 $L$ 完全由幂零（即 ad 幂零）元素组成，则 $L$ 是幂零的（Engel 定理）. 当不属于这种情况时，可找到一个 $x\in L$, 它在抽象 Jordan 分解(5.4)内的半单纯部分 $x_s$ 非零. 这证明了 $L$ 具有由半

单纯元素所组成的非零子代数(例如由这样的 $x_s$ 张成的子代数)．则称这样的子代数为**环面子代数**．以下的引理有点类似于 Engel 定理．

**引理** $L$ 的环面子代数是 Abel 的．

**证** 设 $T$ 是环面子代数．我们要证对所有的 $x\in T$，有 $\mathrm{ad}_T x=0$ 成立．因为 $\mathrm{ad}\,x$ 是可对角化的 ($\mathrm{ad}\,x$ 是半单纯的且 F 是代数闭的)，这就归结为证明 $\mathrm{ad}_T x$ 没有非零特征值．假设与此相反，对某一非零的 $y\in T$ 有 $[xy]=ay(a\neq 0)$．则 $\mathrm{ad}_T y(x)=-ay$ 自己就是 $\mathrm{ad}_T y$ 的一个特征向量，相应的特征值为 0．另一方面，我们可把 $x$ 写成 $\mathrm{ad}_T y$ 的特征向量的线性组合 ($y$ 也是半单纯的)．而 $x$ 经过 $\mathrm{ad}_T y$ 的作用后，剩下的是属于 $\mathrm{ad}_T y$ 的非零特征值的特征向量的线性组合．这与前面的结论相矛盾．▌

现在取定 $L$ 的一个**极大环面子代数** $H$(即 $H$ 不能真包含于任何其它环面子代数之内．记号 $H$ 不如 $T$ 自然，但更符合于传统的记法)．例如，若 $L=\mathfrak{sl}(n, \mathrm{F})$，则很易验证(练习 1)$H$ 可取为(迹 0)对角阵的集合．

由于 $H$ 是 Abel 的 (据上述引理)，$\mathrm{ad}_L H$ 是 $L$ 的半单纯自同态的可换族．按线性代数中的标准结果，$\mathrm{ad}_L H$ 可同时化为对角形．也就是说，$L$ 是子空间 $L_\alpha$ 的直和，

$$L_\alpha=\{x\in L\mid [hx]=\alpha(h)x \text{ 对所有的 } h\in H\},$$

这里的 $\alpha$ 取遍 $H^*$．请注意，$L_0$ 就是 $C_L(H)$，即 $H$ 的中心化子；根据引理，它包含 $H$．把所有使得 $L_\alpha\neq 0$ 的非零 $\alpha\in H^*$ 的集合记为 $\Phi$．$\Phi$ 的元素称为 $L$ 关于 $H$ 的**根**(并且它的个数是有限的)．利用这些记号，我们有了一个**根空间分解**(或称 **Cartan 分解**)：$L=C_L(H)+\coprod_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$ (*)．举例来说，当 $L=\mathfrak{sl}(n, \mathrm{F})$ 时，读者将会看到(*)相当于由标准基 (1.2) 所给出的 $L$ 的分解．以下，我们首先证明 $H=C_L(H)$，然后更详尽地描述根的集合，最后证明 $\Phi$ 完全刻划了 $L$．

我们从关于根空间分解的简单观察着手讨论．

**命题** 对所有 $\alpha, \beta \in H^*$, 则 $[L_\alpha L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$. 若 $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, 则 $\operatorname{ad} x$ 是幂零的. 若 $\alpha, \beta \in H^*$, 且 $\alpha+\beta \neq 0$, 则 $L_\alpha$ 和 $L_\beta$ 关于 $L$ 的 Killing 型 $\varkappa$ 是正交的.

**证** 第一个断言从 Jacobi 等式即可得到: $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, $h \in H$ 意味着

$$\begin{aligned}\operatorname{ad} h([xy]) &= [[hx]y] + [x[hy]] \\ &= \alpha(h)[xy] + \beta(h)[xy] = (\alpha+\beta)(h)[xy].\end{aligned}$$

第二个断言是第一个断言的直接推论.

对于余下的断言, 找一个 $h \in H$, 使 $(\alpha+\beta)(h) \neq 0$. 则若 $x \in L_\alpha$, $y \in L_\beta$, 由 Killing 型的结合性, 可得

$$\varkappa([hx], y) = -\varkappa([xh], y) = -\varkappa(x, [hy]),$$

或 $\alpha(h)\varkappa(x, y) = -\beta(h)\varkappa(x, y)$, $\quad (\alpha+\beta)(h)\varkappa(x, y) = 0$.
这迫使 $\varkappa(x, y) = 0$. ▮

**推论** Killing 型在 $L_0 = C_L(H)$ 上的限制是非退化的.

**证** 从定理 5.1 知道, $\varkappa$ 是非退化的. 另一方面, 根据上面的命题, $L_0$ 与所有的 $L_\alpha (\alpha \in \Phi)$ 正交. 若 $z \in L_0$ 与 $L_0$ 正交, 则 $\varkappa(z, L) = 0$, 迫使 $z = 0$. ▮

## 8.2. $H$ 的中心化子

在此需要一个来自线性代数的事实, 它的证明是显然的.

**引理** 若 $x, y$ 是有限维向量空间的可交换自同态, 且 $y$ 是幂零的, 则 $xy$ 是幂零的. 特别是 $Tr(xy) = 0$. ▮

**命题** 设 $H$ 是 $L$ 的极大环面子代数, 则 $H = C_L(H)$.

**证** 我们分几步进行. 记 $C = C_L(H)$.

(1) $C$ 包含它的元素的半单纯部分与幂零部分. 所谓 $x$ 属于 $C_L(H)$, 也就是 $\operatorname{ad} x$ 把 $L$ 的子空间 $H$ 映入子空间 0. 由命题 4.2, $(\operatorname{ad} x)_s$ 和 $(\operatorname{ad} x)_n$ 也有同样的性质. 但由 (5.4), $(\operatorname{ad} x)_s = \operatorname{ad} x_s$ 以及 $(\operatorname{ad} x)_n = \operatorname{ad} x_n$.

(2) $C$ 的所有半单纯元素在 $H$ 内. 若 $x$ 是半单纯的且 $x$ 中心化 $H$, 则 $H + Fx$ (它显然是 $L$ 的 Abel 子代数) 是环面子代数:

这是因为可交换的半单纯元素之和仍是半单纯的(4.2). 由 $H$ 的极大性, $H+\mathsf{F}x=H$, 所以 $x\in H$.

(3) $\kappa$ 限制于 $H$ 上是非退化的. 设对某个 $h\in H$, $\kappa(h, H)=0$. 我们必须证 $h=0$. 若 $x\in C$ 是幂零的, 则由于 $[xH]=0$ 以及 $\mathrm{ad}\,x$ 幂零意味着(由上述引理)对所有的 $y\in H$, 有 $Tr(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)=0$ 成立, 即 $\kappa(x, H)=0$ 成立. 但此时(1) 和 (2)意味着 $\kappa(h, C)=0$, 所以 $h=0$(由于命题 8.1 的推论, 已经知道 $\kappa$ 限制于 $C$ 上是非退化的).

(4) $C$ 是幂零的. 若 $x\in C$ 是半单纯的, 则由 (2), $x\in H$, 且 $\mathrm{ad}_C\,x(=0)$ 当然是幂零的. 另一方面, 若 $x\in C$ 是幂零的, 则 $\mathrm{ad}_C\,x$ 更加是幂零的. 现在设 $x\in C$ 是任意的, $x=x_s+x_n$. 由于 (1), $x_s$ 和 $x_n$ 都在 $C$ 内, $\mathrm{ad}_C\,x$ 是可交换的幂零元之和, 所以它本身也是幂零的. 由 Engel 定理, $C$ 是幂零的.

(5) $H\cap[CC]=0$. 因为 $\kappa$ 是结合的且 $[HC]=0$, 故 $\kappa(H, [CC])=0$. 再利用 (3).

(6) $C$ 是 Abel 的. 否则 $[CC]\neq 0$. 由 (4), $C$ 是幂零的, 故 $Z(C)\cap[CC]\neq 0$ (引理 3.3). 设 $z\neq 0$ 位于此交集内, 由 (2) 和 (5), $z$ 不能是半单纯的. 所以它的幂零部分 $n$ 是非零的, 且由 (1), 它在 $C$ 内. 因而由命题 4.2, 它也在 $Z(C)$ 内. 但此时我们的引理意味着 $\kappa(n, C)=0$, 这与推论 8.1 相矛盾.

(7) $C=H$. 否则, 由 (1)及(2), $C$ 含有一个非零幂零元 $x$. 按照引理和 (6), $\kappa(x, y)=Tr(\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y)=0$ 对所有的 $y\in C$ 成立, 这与推论 8.1 相矛盾. ∎

**推论** $\kappa$ 在 $H$ 上的限制是非退化的. ∎

这一推论允许我们把 $H$ 与 $H^*$ 等同看待: 对于 $\phi\in H^*$, 对应有(唯一的)元素 $t_\phi\in H$, 它对所有的 $h\in H$ 满足 $\phi(h)=\kappa(t_\phi, h)$. 作为特例, $\Phi$ 对应于 $H$ 的子集 $\{t_\alpha;\ \alpha\in\Phi\}$.

## 8.3. 正 交 性 质

在本小节内, 利用 Killing 型后, 我们将得到关于根空间分解

的更进一步的知识. 我们已看到(命题 8.1)当 $\alpha$, $\beta\in H^*$, $\alpha+\beta\neq 0$ 时, $\kappa(L_\alpha, L_\beta)=0$. 特别地, 对所有 $\alpha\in\Phi$, $\kappa(H, L_\alpha)=0$, 所以(命题 8.2)$\kappa$ 在 $H$ 上的限制是非退化的.

**命题** (a) $\Phi$ 张成 $H^*$.

(b) 若 $\alpha\in\Phi$ 则 $-\alpha\in\Phi$.

(c) 设 $\alpha\in\Phi$, $x\in L_\alpha$, $y\in L_{-\alpha}$, 则 $[xy]=\kappa(x, y)t_\alpha$($t_\alpha$ 按(8.2)内的定义).

(d) 若 $\alpha\in\Phi$, 则 $[L_\alpha L_{-\alpha}]$ 是一维的, 具有基 $t_\alpha$.

(e) $\alpha(t_\alpha)=\kappa(t_\alpha, t_\alpha)\neq 0$ 对 $\alpha\in\Phi$ 成立.

(f) 若 $\alpha\in\Phi$ 且 $x_\alpha$ 是 $L_\alpha$ 的任一非零元素, 则存在 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$, 使得 $x_\alpha$, $y_\alpha$, $h_\alpha=[x_\alpha y_\alpha]$ 张成了 $L$ 的 3 维单纯子代数, 它通过:

$$x_\alpha\mapsto\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ y_\alpha\mapsto\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ h_\alpha\mapsto\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

同构于 $\mathfrak{sl}(2, F)$.

(g) $h_\alpha=2t_\alpha/\kappa(t_\alpha, t_\alpha)$; $h_\alpha=-h_{-\alpha}$.

**证** (a) 若 $\Phi$ 不能张成 $H^*$, 则(由对偶性)存在非零的 $h\in H$, 使 $\alpha(h)=0$ 对所有的 $\alpha\in\Phi$ 成立. 但这意味着 $[h, L_\alpha]=0$ 对所有的 $\alpha\in\Phi$ 成立. 由于 $[hH]=0$, 这又迫使 $[hL]=0$ 或 $h\in Z(L)=0$, 这是荒谬的.

(b) 设 $\alpha\in\Phi$. 若 $-\alpha\notin\Phi$ (即 $L_{-\alpha}=0$), 则 $\kappa(L_\alpha, L_\beta)=0$ 对所有的 $\beta\in H^*$ 成立(命题 8.1). 所以 $\kappa(L_\alpha, L)=0$, 这与 $\kappa$ 的非退化性相矛盾.

(c) 设 $\alpha\in\Phi$, $x\in L_\alpha$, $y\in L_{-\alpha}$. 对任意的 $h\in H$, $\kappa$ 的结合性意味着

$$\begin{aligned}\kappa(h, [xy])&=\kappa([hx], y)=\alpha(h)\kappa(x, y)=\kappa(t_\alpha, h)\kappa(x, y)\\&=\kappa(\kappa(x, y)t_\alpha, h)=\kappa(h, \kappa(x, y)t_\alpha).\end{aligned}$$

这就是说 $H$ 正交于 $[xy]-\kappa(x, y)t_\alpha$, 迫使 $[xy]=\kappa(x, y)t_\alpha$(推论 8.2).

(d) 在(c)中已证, 只要 $[L_\alpha L_{-\alpha}]\neq 0$, 则 $t_\alpha$ 张成了 $[L_\alpha L_{-\alpha}]$. 设 $0\neq x\in L_\alpha$, 若 $\kappa(x, L_{-\alpha})=0$, 则 $\kappa(x, L)=0$ (见(b)的证明), 由

于 $\kappa$ 是非退化的，这是荒谬的．所以我们可找到 $0\neq y\in L_{-\alpha}$，使 $\kappa(x, y)\neq 0$．由 (c)，$[xy]\neq 0$．

(e) 假设 $\alpha(t_\alpha)=0$，这样，对所有的 $x\in L_\alpha$，$y\in L_{-\alpha}$，有 $[t_\alpha x]=0=[t_\alpha y]$．按 (d)，可找到满足 $\kappa(x, y)\neq 0$ 的 $x$, $y$．把两者之一乘以纯量，就可假定有 $\kappa(x, y)=1$．由 (c)，则 $[xy]=t_\alpha$，从而 $L$ 中由 $x$, $y$, $t_\alpha$ 张成的子空间 $S$ 是一个 3 维可解代数，$S\cong \mathrm{ad}_L S\subset \mathfrak{gl}(V)$．特别是对所有的 $s\in[SS]$，$\mathrm{ad}_L s$ 是幂零的（推论 4.1A）．所以 $\mathrm{ad}_L t_\alpha$ 既是半单纯又是幂零的，即 $\mathrm{ad}_L t_\alpha=0$．这也就是说 $t_\alpha\in Z(L)=0$，这与 $t_\alpha$ 的选取相矛盾．

(f) 给出了 $0\neq x_\alpha\in L_\alpha$，可找到 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$，使 $\kappa(x_\alpha, y_\alpha)=2/\kappa(t_\alpha, t_\alpha)$．从 (e) 以及 $\kappa(x_\alpha, L_{-\alpha})\neq 0$ 来看，这是可能的．置 $h_\alpha=2t_\alpha/\kappa(t_\alpha, t_\alpha)$，由 (c)，则有 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$．此外，

$$[h_\alpha x_\alpha]=(2/\alpha(t_\alpha))[t_\alpha x_\alpha]=(2\alpha(t_\alpha)/\alpha(t_\alpha))x_\alpha=2x_\alpha,$$

类似地，$[h_\alpha y_\alpha]=-2y_\alpha$．所以 $x_\alpha$, $y_\alpha$, $h_\alpha$ 张成了 $L$ 的 3 维子代数，它与 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 有相同的乘法表（例 2.1）．

(g) 回想起 $t_\alpha$ 定义为 $\kappa(t_\alpha, h)=\alpha(h)$ $(h\in H)$．这证明了 $t_\alpha=-t_{-\alpha}$，再看到 $h_\alpha$ 定义的方法，这一结论就可得出．∎

## 8.4. 整　性

对于每一对根 $\alpha$, $-\alpha$（命题 8.3(b)），设 $S_\alpha\cong\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 是按命题 8.3(f) 构造的 $L$ 的子代数．由于 Weyl 定理与定理 7.2，我们对所有的（有限维）$S_\alpha$ 模有了一个完整的认识，尤其是能描述 $\mathrm{ad}_L S_\alpha$．

固定 $\alpha\in\Phi$．首先考虑由 $H$ 以及形如 $L_{c\alpha}$ $(c\in\mathsf{F}^*)$ 的所有根空间所张成的 $L$ 的子空间 $M$．根据命题 8.1，它是 $L$ 的 $S_\alpha$-子模．由定理 7.2，$h_\alpha$ 在 $M$ 上的权是整数 0 和 $2c=c\alpha(h_\alpha)$（对使得 $L_{c\alpha}\neq 0$ 的非零的 $c$）．特别是，这里出现的所有 $c$ 必须都是 $\frac{1}{2}$ 的整数倍．现在 $S_\alpha$ 作用在 $\mathrm{Ker}\,\alpha$ 上是平凡的，这里的 $\mathrm{Ker}\,\alpha$ 是 $H$ 内余维数为 1 的子空间，且是 $\mathsf{F}h_\alpha$ 的余空间．但另一方面，$S_\alpha$ 本身就

是 $M$ 的一个不可约 $S_\alpha$-子模，这两者合在一起，就说明除了 $\operatorname{Ker}\alpha$ 和 $S_\alpha$ 外，$h_\alpha$ 的权 0 不再出现．所以在 $M$ 内出现的仅有的偶数权为 0，±2．这证明了 $2\alpha$ 不是根，即一个根的 2 倍不可能是根．那么 $(1/2)\alpha$ 也不可能是一个根，所以 1 不可能作为 $h_\alpha$ 在 $M$ 内的权．定理 7.2 的推论就意味着 $M=H+S_\alpha$．特别是，$\dim L_\alpha=1$（所以 $S_\alpha$ 可唯一地确定为由 $L_\alpha$ 和 $L_{-\alpha}$ 所生成的 $L$ 的子代数），并且根 $\alpha$ 的倍数能作为根的，只有 $\pm\alpha$.

下一步我们再验看 $S_\alpha$ 在根空间 $L_\beta$，$\beta\neq\pm\alpha$ 上有怎样的作用．置 $K=\sum_{i\in\mathbf{Z}}L_{\beta+i\alpha}$．按上段的说明，每个根空间是一维的，且没有一个 $\beta+i\alpha$ 能等于 0，所以 $K$ 是 $L$ 的一个 $S_\alpha$-子模，对不同的整数权 $\beta(h_\alpha)+2i$（使 $\beta+i\alpha\in\Phi$ 的 $i\in\mathbf{Z}$），它有一维的权空间．显然，0 和 1 不可能同时作为这种形式的权，所以定理 7.2 的推论意味着 $K$ 是不可约的，首权（相应的：最低权）必须是 $\beta(h_\alpha)+2q$（相应的：$\beta(h_\alpha)-2r$），这里的 $q$（相应的：$r$）是使得 $\beta+q\alpha$（相应的：$\beta-r\alpha$）为根的最大整数．此外，$K$ 上的权形成一个公差为 2 的算术级数（定理 7.2），也就是说根 $\beta+i\alpha$ 形成一个链（经过 $\beta$ 的 $\alpha$-链）$\beta-r\alpha$，…，$\beta$，…，$\beta+q\alpha$．再请注意 $(\beta-r\alpha)(h_\alpha)=-(\beta+q\alpha)(h_\alpha)$，或 $\beta(h_\alpha)=r-q$．最后，可以看出：若 $\alpha$，$\beta$，$\alpha+\beta\in\Phi$，则 $\operatorname{ad}L_\alpha$ 把 $L_\beta$ 映到 $L_{\alpha+\beta}$ 上（引理 7.2），即 $[L_\alpha L_\beta]=L_{\alpha+\beta}$.

概括起来，得：

**命题** (a) 若 $\alpha\in\Phi$ 就有 $\dim L_\alpha=1$．特别是，$S_\alpha=L_\alpha+L_{-\alpha}+H_\alpha$（$H_\alpha=[L_\alpha L_{-\alpha}]$），且对已给的非零 $x_\alpha\in L_\alpha$，存在唯一的 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$，满足 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$.

(b) 若 $\alpha\in\Phi$，则 $\alpha$ 的纯量倍也是根的，只有 $\alpha$ 与 $-\alpha$.

(c) 若 $\alpha$，$\beta\in\Phi$，则 $\beta(h_\alpha)\in\mathbf{Z}$，$\beta-\beta(h_\alpha)\alpha\in\Phi$．（数 $\beta(h_\alpha)$ 称为 **Cartan 整数**.）

(d) 若 $\alpha$，$\beta$，$\alpha+\beta\in\Phi$，则 $[L_\alpha L_\beta]=L_{\alpha+\beta}$.

(e) 设 $\alpha$，$\beta\in\Phi$，$\beta\neq\pm\alpha$．令 $r$，$q$ 分别是使得 $\beta-r\alpha$，$\beta+q\alpha$ 为根的最大整数，则所有的 $\beta+i\alpha\in\Phi$ $(-r\leqslant i\leqslant q)$，且 $\beta(h_\alpha)=r-q$.

(f) $L$ 是由根空间 $L_\alpha$ 生成的(作为李代数). ∎

## 8.5. 有理性，小结

$L$ 是(特征数 0 的代数闭域 F 上的)半单纯李代数，$H$ 是极大环面子代数，$\Phi\subset H^*$ 是 $L$ 的根集(关于 $H$)，$L=H+\coprod_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$ 是根空间分解.

因为 Killing 型限制在 $H$ 上是非退化的(推论 8.2)，可将它转移到 $H^*$ 上，对所有的 $\gamma, \delta\in H^*$，令 $(\gamma, \delta)=\kappa(t_\gamma, t_\delta)$. 我们知道 $\Phi$ 张成 $H^*$(命题 8.3(a))，所以可选取 $H^*$ 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$，它由根所组成. 若 $\beta\in\Phi$，可把 $\beta$ 唯一地写成

$$\beta=\sum_{i=1}^{l} c_i\alpha_i,\ c_i\in \mathsf{F}.$$

而事实上 $c_i\in\mathbf{Q}$. 为了证明这一点，在此要用一点线性代数. 对每一个 $j=1, \cdots, l$，$(\beta, \alpha_j)=\sum_{j=1}^{l} c_i(\alpha_i, \alpha_j)$，两边乘以 $2/(\alpha_j, \alpha_j)$，即得

$$2(\beta, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)=\sum_{i=1}^{l}\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}c_i.$$

它可以看成含 $l$ 个未知量 $c_i$ 的 $l$ 个方程的方程组，又由于命题 8.4(e)，具有整(从而也是有理的)系数. 因为 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ 是 $H^*$ 的基，且双线性型是非退化的，所以矩阵 $((\alpha_i, \alpha_j))_{1\le i, j\le l}$ 是非奇异的，从而这一方程组的系数矩阵也是非奇异的. 因此可得出结论：这一方程组在 $\mathbf{Q}$ 上已有唯一解，也就证明了我们的断言.

刚才已证明，由所有的根张成的 $H^*$ 的 $\mathbf{Q}$-子空间 $E_\mathbf{Q}$ 具有 $\mathbf{Q}$-维数 $l=\dim_\mathsf{F} H^*$. 甚至还可得到更多的性质：回想起对于 $\lambda, \mu\in H^*$，$(\lambda, \mu)=\kappa(t_\lambda, t_\mu)=\sum_{\alpha\in\Phi}\alpha(t_\lambda)\alpha(t_\mu)=\sum_{\alpha\in\Phi}(\alpha, \lambda)(\alpha, \mu)$. 作为其特例，当 $\beta\in\Phi$，$(\beta, \beta)=\sum(\alpha, \beta)^2$. 除以 $(\beta, \beta)^2$ 后，可得 $1/(\beta, \beta)=\sum(\alpha, \beta)^2/(\beta, \beta)^2$，而右式在 $\mathbf{Q}$ 内，这是因为据命题 8.4(e)，$2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)\in\mathbf{Z}$. 所以 $(\beta, \beta)\in\mathbf{Q}$，从而 $(\alpha, \beta)\in\mathbf{Q}$. 由此可见 $E_\mathbf{Q}$ 内向量的所有内积都是有理数，故我们得到 $E_\mathbf{Q}$ 上的一个非退化型. 又据前述，$(\lambda, \lambda)=\sum(\alpha, \lambda)^2$，因而 $(\lambda, \lambda)$ 是有理数的

平方和，从而是正的(除非 $\lambda=0$).

现在设 E 是把基域从 $\mathbf{Q}$ 扩张到 $\mathbf{R}$ 所得到的实向量空间 $\mathsf{E}=\mathbf{R}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathsf{E}_{\mathbf{Q}}$. 则此双线性型典范地扩张到 E 上，且由于上面的论述，它是正定的，即 E 是欧氏空间. $\Phi$ 包含 E 的一个基，且 $\dim_{\mathbf{R}}\mathsf{E}=l$. 以下的定理小结了关于 $\Phi$ 的基本事实，可参看命题 8.3(a)(b) 和 8.4(b)(c).

**定理** $L, H, \Phi$, E 如同上述. 则:

(a) $\Phi$ 张成 E, 且 0 不属于 $\Phi$.

(b) 若 $\alpha\in\Phi$, 则 $-\alpha\in\Phi$, 但 $\alpha$ 的其它纯量倍均不是根.

(c) 若 $\alpha, \beta\in\Phi$, 则 $\beta-(2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha\in\Phi$.

(d) 若 $\alpha, \beta\in\Phi$, 则 $\dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\in\mathbf{Z}$. ▌

用第三章的语言来讲，这一定理断定了 $\Phi$ 是实欧氏空间 E 内的一个**根系**. 我们已建立起一个对应 $(L, H)\mapsto(\Phi, \mathsf{E})$. 而 $(\Phi, \mathsf{E})$ 可在第三章内被完全分类. 以后(第四和第五章)将可看到，这一对应实际上是一一的，而且从表面上看来 $\Phi$ 依赖于 $H$ 的选取，但这并非是本质的.

## 练　　习

1. 若 $L$ 是型 $\mathsf{A}_l$, $\mathsf{B}_l$, $\mathsf{C}_l$ 或 $\mathsf{D}_l$ 的典型线性李代数(见 (1.2)), 证明 $L$ 内所有对角矩阵的集合是一个极大环面子代数，维数是 $l$. (见练习 2.8.)

2. 对练习 1 中的每个代数，确定根及根空间. 不同的 $h_\alpha$ 怎样用 (1.2) 所给出的 $H$ 的基来表示?

3. 若 $L$ 是典型李代数，计算 Killing 型在练习 1 中所描述的极大环面子代数上的限制.

4. 若 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, 证明每个极大环面子代数是一维的.

5. 若 $L$ 是半单纯的，$H$ 是极大环面子代数，证明 $H$ 是自正规的(即 $H=N_L(H)$).

6. 计算 $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ 的对偶于(关于 Killing 型)标准基(见练习 5.5)的基.

7. 设 $L$ 是半单纯的，$H$ 是极大环面子代数. 若 $h\in H$, 证明 $C_L(h)$ 是简约的(按练习 6.5 的意义). 证明 $H$ 包含元素 $h$, 对于它，$C_L(h)=H$. 找出

$\mathfrak{sl}(n, F)$ 中这样的 $h$.

8. 对 $\mathfrak{sl}(n, F)$ (以及其它典型代数), 算出根链及 Cartan 整数. 特别是, 证明: 对 $\mathfrak{sl}(n, F)$, 所有的 Cartan 整数 $2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$, $\alpha \neq \pm\beta$, 是 0, $\pm 1$.

9. 证明每一个 3 维半单纯李代数具有与 $\mathfrak{sl}(2, F)$ 相同的根系. 所以同构于 $\mathfrak{sl}(2, F)$.

10. 证明不存在 4 维, 5 维或 7 维的半单纯李代数.

11. 若 $(\alpha, \beta)>0$, 证明 $\alpha-\beta\in\Phi(\alpha, \beta\in\Phi)$. 反过来正确吗?

【附注】

使用极大环面子代数而不使用更传统的(但等价的) Cartan 子代数, 是受到半单纯代数群的相平行的理论的启发, 参见 Borel[1], Seligman[2], Winter[1].

# 第三章　根　　系

## 9. 公 理 体 系

### 9.1. 欧氏空间内的反射

在这一章里，始终要涉及到一个固定的欧氏空间E，也就是说，E是$\mathbf{R}$上一个有限维向量空间，且被赋予一个对称正定双线性型$(\alpha, \beta)$. 从几何上说，E内的一个反射是一个可逆线性变换，它使某一超平面(余维数1的子空间)上的点保持不变，并把垂直于此超平面的任一向量变为它的负向量. 显然，反射是正交变换，即保持E的内积. 任一非零向量$\alpha$确定了一个反射$\sigma_\alpha$，它的反射超平面为$P_\alpha=\{\beta\in \mathsf{E} \mid (\beta, \alpha)=0\}$. 当然与$\alpha$成比例的非零向量导致同一个反射. 很容易写出明显的公式：$\sigma_\alpha(\beta)=\beta-\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$. (因为它把$\alpha$变为$-\alpha$，且使$P_\alpha$内所有的点不变.) 由于数$2(\beta. \alpha)/(\alpha, \alpha)$经常出现，我们把它简写为$\langle\beta, \alpha\rangle$. 注意，$\langle\beta, \alpha\rangle$仅对第一个变量才是线性的.

为了以后应用，在此给出如下引理：

**引理**　设$\Phi$是张成E的有限集.并假设所有的反射$\sigma_\alpha(\alpha\in\Phi)$都使$\Phi$不变. 如果$\sigma\in GL(\mathsf{E})$使$\Phi$不变，且使E的一个超平面$P$上的每个点都固定不变，又把某个非零的$\alpha\in\Phi$变为$-\alpha$，则$\sigma=\sigma_\alpha$ (且$P=P_\alpha$).

**证**　设$\tau=\sigma\sigma_\alpha(=\sigma\sigma_\alpha^{-1})$. 则$\tau(\Phi)=\Phi$, $\tau(\alpha)=\alpha$，且$\tau$作用在子空间$\mathbf{R}\alpha$上以及商空间$\mathsf{E}/\mathbf{R}\alpha$上都相当于恒等变换. 这样，$\tau$的所有特征值都是1，且$\tau$的最小多项式能除尽$(T-1)^l(l=\dim \mathsf{E})$. 另一方面，因为$\Phi$是有限的，不可能所有的向量$\beta, \tau(\beta), \cdots,$

$\tau^k(\beta)$ $(\beta\in\Phi,\ k\geqslant \mathrm{Card}\,\Phi)$都不相同，所以 $\tau$ 的某一乘幂使 $\beta$ 不变．选取足够大的 $k$，使 $\tau^k$ 固定所有的 $\beta\in\Phi$．因为 $\Phi$ 张成 E，这迫使 $\tau^k=1$．所以 $\tau$ 的最小多项式能除尽 $T^k-1$．把它与前面的结果联系起来，就看出 $\tau$ 具有最小多项式 $T-1=g.c.d.(T^k-1,(T-1)^l)$，即 $\tau=1$．∎

## 9.2. 根　系

欧氏空间 E 的一个子集 $\Phi$，如果满足以下公理，就被称为 E 内一个根系：

(R1) $\Phi$ 是有限的，它张成 E，且不含 0．

(R2) 若 $\alpha\in\Phi$，则 $\alpha$ 在 $\Phi$ 内的仅有的倍数是 $\pm\alpha$．

(R3) 若 $\alpha\in\Phi$，则反射 $\sigma_\alpha$ 使 $\Phi$ 不变．

(R4) 若 $\alpha,\ \beta\in\Phi$，则 $\langle\beta,\ \alpha\rangle\in\mathbf{Z}$．

在上述公理中含有一些重复，特别是(R2)和(R3)都意味着 $\Phi=-\Phi$．在文献中，有时(R2)被略去，这时候刚才所说的"根系"就称为"约化根系"(见练习 9)．请注意，如果把已给的 E 上内积改变一个正数倍，不会影响我们的公理，因为它只用到内积的比值．

设 $\Phi$ 是 E 内的根系．用 $\mathscr{W}$ 表示由反射 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 所生成的 $GL(\mathrm{E})$ 的子群．据(R3)，$\mathscr{W}$ 把集合 $\Phi$ 作了一个置换．因为由(R1)，$\Phi$ 是有限的，且张成 E，这就允许我们把 $\mathscr{W}$ 等同于 $\Phi$ 上对称群的一个子群，从而 $\mathscr{W}$ 是有限的．$\mathscr{W}$ 被称为 $\Phi$ 的 **Weyl 群**，它在以后起着极其重要的作用．以下引理说明了 E 的某些自同构是如何通过共轭作用在 $\mathscr{W}$ 上的．

**引理** 设 $\Phi$ 是 E 内根系，具有 Weyl 群 $\mathscr{W}$．若 $\sigma\in GL(\mathrm{E})$ 使 $\Phi$ 不变，则 $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}=\sigma_{\sigma(\alpha)}$ 对所有 $\alpha\in\Phi$ 成立，且 $\langle\beta,\ \alpha\rangle=\langle\sigma(\beta),\ \sigma(\alpha)\rangle$ 对所有的 $\alpha,\ \beta\in\Phi$ 成立．

**证** 因为 $\sigma_\alpha(\beta)\in\Phi$，$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}(\sigma(\beta))=\sigma\sigma_\alpha(\beta)\in\Phi$．但这等于 $\sigma(\beta-\langle\beta,\ \alpha\rangle\alpha)=\sigma(\beta)-\langle\beta,\ \alpha\rangle\sigma(\alpha)$．由于当 $\beta$ 取遍 $\Phi$ 时，$\sigma(\beta)$ 也取遍 $\Phi$，我们可知 $\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$ 使 $\Phi$ 不变，并且使超平面 $\sigma(P_\alpha)$ 上的每一点都不变，又把 $\sigma(\alpha)$ 映为 $-\sigma(\alpha)$．据引理 9.1，$\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}=$

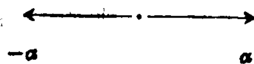
$\sigma_{\sigma(\alpha)}$. 然后再把前面的等式与等式 $\sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta))=\sigma(\beta)-\langle\sigma(\beta),\sigma(\alpha)\rangle\sigma(\alpha)$ 相比较，即可得到引理的第二个断言. ▌

在欧氏空间 E, E′ 的相应的根系 $\Phi$, $\Phi'$ 之间，可以很自然地得到同构的概念：如果存在向量空间的同构（不必是等距变换）$\phi$: E→E′，它将 $\Phi$ 映到 $\Phi'$ 上，且使得对每一对根 $\alpha$, $\beta\in\Phi$，有 $\langle\phi(\beta), \phi(\alpha)\rangle=\langle\beta, \alpha\rangle$，则称($\Phi$, E)和($\Phi'$, E′)是同构的. 这样就立即可得 $\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta))=\phi(\sigma_\alpha(\beta))$. 所以由根系的一个同构诱导了 Weyl 群间的一个自然同构 $\sigma\mapsto\phi\circ\sigma\circ\phi^{-1}$. 由于上面的引理，$\Phi$ 的一个自同构也就是使 $\Phi$ 保持不变的 E 的自同构. 特别是，我们可将 $\mathscr{W}$ 看成 Aut$\Phi$ 的一个子群（见练习 6）.

通常我们不仅用到 $\alpha$，还要用到 $\alpha^\vee=2\alpha/(\alpha, \alpha)$. 称 $\Phi^\vee=\{\alpha^\vee|\alpha\in\Phi\}$ 为 $\Phi$ 的对偶根系（或逆根系）. 实际上它是 E 内的一个根系，而且它的 Weyl 群自然地同构于 $\mathscr{W}$（练习 2）.（在§8 的李代数里，通过 Killing 型使 $H^*$ 等同于 $H$ 后，$\alpha$ 对应于 $t_\alpha$，而 $\alpha^\vee$ 对应于 $h_\alpha$.）

## 9.3. 例

称 $l=\dim$ E 为根系 $\Phi$ 的秩. 当 $l\leq2$ 时，我们可画个简单的图来描述 $\Phi$. 由于(R2)，当 $l=1$ 时，只有一种可能性，标记为 ($A_1$)：




当然，它实际上是一个根系（Weyl 群是 2 阶的）. 在李代数理论中，它属于 $\mathfrak{sl}(2, F)$.

秩 2 提供了更多的可能性. 其中的 4 个描绘在图 1 内（以后将会知道，只有这 4 种可能）. 在每种情形里，请读者直接验证公理以及确定 $\mathscr{W}$.

## 9.4. 根 偶

公理(R4)严格地限制了在根偶间的可能角度. 回想起在向量

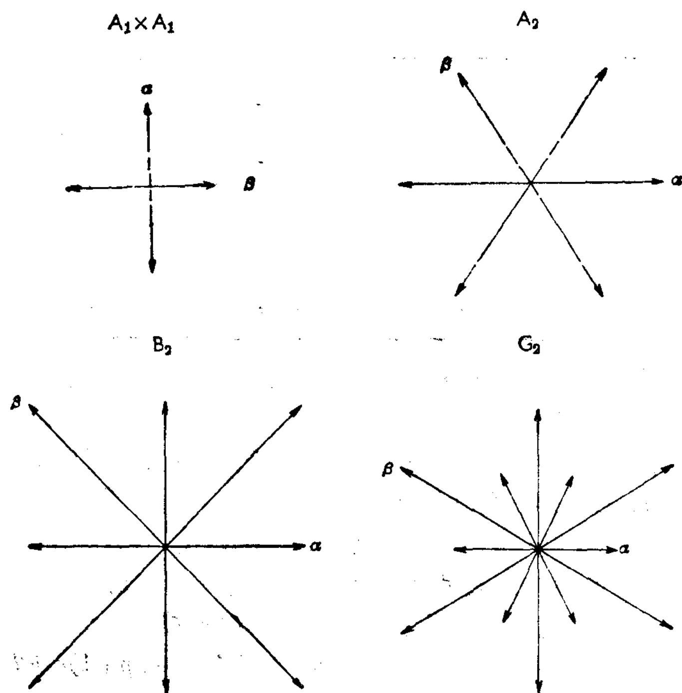



图 1

$\alpha, \beta \in E$ 之间的夹角 $\theta$ 的余弦是用以下公式给出的：$\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta = (\alpha, \beta)$. 所以 $\langle\beta, \alpha\rangle = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) = 2(\|\beta\|/\|\alpha\|)\cos\theta$ 且 $\langle\alpha, \beta\rangle\langle\beta, \alpha\rangle = 4\cos^2\theta$. 最后一个数是非负整数. 但 $0 \leqslant \cos^2\theta \leqslant 1$, 且 $\langle\alpha, \beta\rangle$, $\langle\beta, \alpha\rangle$ 有相同的符号，所以当 $\alpha \neq \pm\beta$, $\|\beta\| \geqslant \|\alpha\|$ 时，只有以下的可能性(表 1).

读者将会看到，这些角度与相对长度正是图 1(9.3)中所描绘的. (对于 $A_1 \times A_1$, 可以在一个方向上改变尺度，以使得 $\|\alpha\| = \|\beta\|$.) 下面的简单但有用的判别准则可以从表 1 中看出来.

**引理** 设 $\alpha, \beta$ 是不成比例的根. 若 $(\alpha, \beta) > 0$ (即 $\alpha, \beta$ 之间的夹角是严格锐角)，则 $\alpha - \beta$ 是一个根. 若 $(\alpha, \beta) < 0$，则 $\alpha + \beta$ 是一个根.

表 1

| $\langle\alpha,\beta\rangle$ | $\langle\beta,\alpha\rangle$ | $\theta$ | $\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\pi/2$ | 不确定 |
| 1 | 1 | $\pi/3$ | 1 |
| $-1$ | $-1$ | $2\pi/3$ | 1 |
| 1 | 2 | $\pi/4$ | 2 |
| $-1$ | $-2$ | $3\pi/4$ | 2 |
| 1 | 3 | $\pi/6$ | 3 |
| $-1$ | $-3$ | $5\pi/6$ | 3 |

**证** 第二个断言可从第一个推出(只要用 $-\beta$ 代替 $\beta$). 因为 $(\alpha,\beta)>0$ 当且仅当 $\langle\alpha,\beta\rangle>0$, 表 1 显示了 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 或 $\langle\beta,\alpha\rangle$ 中有一个是 1. 若 $\langle\alpha,\beta\rangle=1$, 则 $\sigma_\beta(\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$ (R3). 类似地, 若 $\langle\beta,\alpha\rangle=1$, 则 $\beta-\alpha\in\Phi$, 所以 $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta-\alpha)=\alpha-\beta\in\Phi$. ∎

作为一个应用, 考虑一对不成比例的根 $\alpha,\beta$. 观察所有形如 $\beta+i\alpha(i\in\mathbf{Z})$ 的根, 即经过 $\beta$ 的 $\alpha$-链. 设 $r, q\in\mathbf{Z}^+$ 是使得 $\beta-r\alpha\in\Phi$, $\beta+q\alpha\in\Phi$ 的最大整数. 如果某一个 $\beta+i\alpha\notin\Phi(-r\leqslant i\leqslant q)$, 我们可在这个区间内找到 $p<s$, 使得 $\beta+p\alpha\in\Phi$, $\beta+(p+1)\alpha\notin\Phi$, $\beta+(s-1)\alpha\notin\Phi$, $\beta+s\alpha\in\Phi$. 但此时由引理可知: $(\alpha,\beta+p\alpha)\geqslant0$, $(\alpha,\beta+s\alpha)\leqslant0$. 因为 $p<s$, 且 $(\alpha,\alpha)>0$, 这是荒谬的. 我们可归结为: 经过 $\beta$ 的 $\alpha$-链是从 $\beta-r\alpha$ 到 $\beta+q\alpha$, 中间不中断的. 现在 $\sigma_\alpha$ 只是把任一根加上或减去 $\alpha$ 的倍数, 所以这个链在 $\sigma_\alpha$ 下不变. 从几何上看, $\sigma_\alpha$ 只是把链倒转 (读者很容易给它一个代数证明). 特别是, $\sigma_\alpha(\beta+q\alpha)=\beta-r\alpha$. 左边是 $\beta-\langle\beta,\alpha\rangle\alpha-q\alpha$, 所以最终得到: $r-q=\langle\beta,\alpha\rangle$ (见命题 8.4(e)). 从而立即可得: 根链的长度最多是 4.

## 练 习

(除非特别说明, $\Phi$ 总是表示 E 内的根系, Weyl 群是 $\mathscr{W}$.)

1. 设 E′ 是 E 的子空间. 如果一个反射 $\sigma_\alpha$ 使 E′ 不变, 证明或者 $\alpha\in$ E′ 或者 E′ $\subset P_\alpha$.

2. 证明 $\Phi^\vee$ 是 E 内的根系, 它的 Weyl 群自然地同构于 $\mathscr{W}$. 再证

$\langle\alpha^\vee, \beta^\vee\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle$，并当 $A_1$, $A_2$, $B_2$, $G_2$ 的情形，绘出 $\Phi^\vee$ 的图.

3. 在表 1 中证明 $\mathscr{W}$ 内 $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ 的阶数当 $\theta = \pi/2$, $\pi/3$(或 $2\pi/3$), $\pi/4$(或 $3\pi/4$), $\pi/6$(或 $5\pi/6$)时，分别为 2, 3, 4, 6. [注意 $\sigma_\alpha\sigma_\beta$ = 旋转 $2\theta$.]

4. 证明 $A_1 \times A_1$, $A_2$, $B_2$, $G_2$ 的 Weyl 群分别是阶 4, 6, 8, 12 的二面体群. 如果 $\Phi$ 是秩 2 的任一根系，证明它的 Weyl 群必须是其中之一.

5. 用例子说明，即使 $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ 时，$\alpha - \beta$ 也可能是一个根(见引理 9.4).

6. 证明 $\mathscr{W}$ 是 Aut $\Phi$(＝把 $\Phi$ 变成自己的所有自同构组成的群)的正规子群.

7. 设 $\alpha, \beta \in \Phi$ 张成了 E 的子空间 E′. 证明 $E' \cap \Phi$ 是 E′ 的一个根系. 类似地证明 $\Phi \cap (\mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta)$ 是 E′ 内一个根系(是否必须与 $E' \cap \Phi$ 重合?). 更一般地，设 $\Phi'$ 是 $\Phi$ 的一个非空子集，使 $\Phi' = -\Phi'$，并且由 $\alpha, \beta \in \Phi'$, $\alpha + \beta \in \Phi$ 可得出 $\alpha + \beta \in \Phi'$. 证明 $\Phi'$ 是在它所张成的 E 的子空间内的根系. [使用表 1.]

8. 计算 $G_2$ 的根链以验证关系式 $r - q = \langle\beta, \alpha\rangle$.

9. 设 $\Phi$ 是欧氏空间 E 内仅满足(R1), (R3), (R4)的向量集. 证明 $\alpha \in \Phi$ 的倍数中能够属于 $\Phi$ 的只可能有 $\pm 1/2\alpha$, $\pm\alpha$, $\pm 2\alpha$. 验证 $\{\alpha \in \Phi \mid 2\alpha \notin \Phi\}$ 是一个根系.

**例** 见图 2.

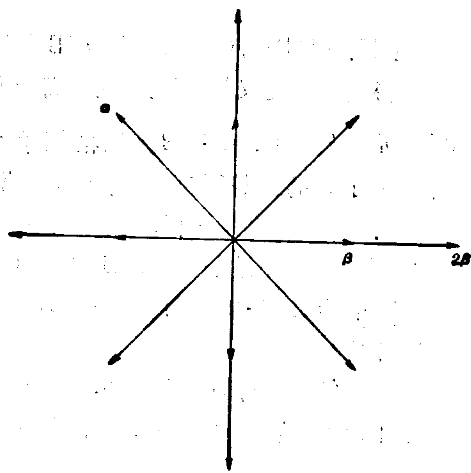



图 2

10. 设$\alpha, \beta\in\Phi$,经过$\beta$的$\alpha$-链是$\beta-r\alpha, \cdots, \beta+q\alpha$,经过$\alpha$的$\beta$-链是$\alpha-r'\beta, \cdots, \alpha+q'\beta$. 证明: $q(r+1)/(\beta, \beta)=q'(r'+1)/(\alpha, \alpha)$.

11. 设$C$是正实数.若$\Phi$含有所有平方长度(*)等于$C$的根.证明所有这样的根的集合是它张成的E的子空间内的一个根系. 描述出现在图1中的可能性.

【附注】

用公理化方法研究根系(如在Serre[2], Bourbaki[2]中)具有这样的优点: 它能获得同时能应用于李代数,李群以及线性代数群的结果. 关于历史的评述, 可参看Bourbaki[2].

## 10. 素根和Weyl群

在本节内, $\Phi$始终表示欧氏空间E内的秩$l$的根系, 具有Weyl群$\mathscr{W}$.

### 10.1. 基和Weyl房

$\Phi$的一个子集$\Delta$若满足以下条件,则被称为基:

(B1) $\Delta$是E的基,

(B2) 每个根$\beta$可写成$\beta=\sum k_\alpha\alpha(\alpha\in\Delta)$, 并且具有全正或全负的整系数$k_\alpha$.

$\Delta$内的根称为素根. 据(B1), Card $\Delta=l$, 且(B2)中的$\beta$的表示式是唯一的. 这使得我们能定义根(关于$\Delta$的)高为$\mathrm{ht}\,\beta=\sum\limits_{\alpha\in\Delta}k_\alpha$. 若所有的$k_\alpha\geqslant 0$(或所有$k_\alpha\leqslant 0$), 就称$\beta$为**正根**(或**负根**). 且记为$\beta\succ 0$ (或$\beta\prec 0$). (关于$\Delta$的)正根与负根的集合通常记为$\Phi^+$或$\Phi^-$(显然$\Phi^-=-\Phi^+$). 若$\alpha$和$\beta$是正根, 且$\alpha+\beta$是根, 则显然$\alpha+\beta$也是正根. 实际上, 用下述的方法, $\Delta$定义了E上与记号$\alpha\succ 0$相容的一个半序: 定义$\beta\prec\alpha$当且仅当$\alpha-\beta$是正根之和(或等价地, 素根之和)或$\beta=\alpha$.

在基的定义中只存在一个问题没有解决: 它并未保证基的存在. 在(9.3)的例子中, 标号为$\alpha, \beta$的根实际上是一个基(验证!).

(*) 译者注: $\alpha$的平方长度就是$(\alpha, \alpha)=\|\alpha\|^2$.

请注意：$\alpha$ 和 $\beta$ 之间的角是钝角，即 $(\alpha,\ \beta)\leqslant 0$. 这不是偶然的.

**引理** 若 $\Delta$ 是 $\Phi$ 的基，则对于 $\Delta$ 内的 $\alpha\neq\beta$，有 $(\alpha,\ \beta)\leqslant 0$，且 $\alpha-\beta$ 不是根.

**证** 否则的话，$(\alpha,\beta)>0$. 由于假设 $\alpha\neq\beta$，显然还有 $\alpha\neq-\beta$，故引理 9.4 断定 $\alpha-\beta$ 是根. 但这又违反了(B2). ▌

我们的目标是证明以下定理.

**定理** $\Phi$ 有一个基.

这一证明实际上将给出构造所有可能的基的具体方法. 对每个向量 $\gamma\in E$，定义 $\Phi^{+}(\gamma)=\{\alpha\in\Phi\mid(\gamma,\ \alpha)>0\}=$ 位于 $\gamma$ 的正交超平面的"正"侧的根的集合. 有限多个超平面 $P_{\alpha}(\alpha\in\Phi)$ 的并集不可能占满 E，这是欧氏几何的一个基本事实(留给读者去作严格证明). 如果 $\gamma\in E-\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_{\alpha}$，则称 $\gamma$ 为**正则的**，否则称 $\gamma\in E$ 为**奇异的**. 当 $\gamma$ 为正则时，显然有 $\Phi=\Phi^{+}(\gamma)\cup-\Phi^{+}(\gamma)$. 这种情况，正是我们所要寻求的. 若对某些 $\beta_i\in\Phi^{+}(\gamma)$，有 $\alpha=\beta_1+\beta_2$，则称 $\alpha\in\Phi^{+}(\gamma)$ 为**可分解的**，否则称为**不可分解**. 现在只要证明以下的陈述就够了.

**定理** 设 $\gamma\in E$ 是正则的. 则在 $\Phi^{+}(\gamma)$ 内的所有不可分解的根的集合 $\Delta(\gamma)$ 是 $\Phi$ 的一个基，且每一个基都可用这样的方法得到.

**证** 分几步进行：

(1) $\Phi^{+}(\gamma)$ 内的每个根都是 $\Delta(\gamma)$ 的非负的 $\mathbf{Z}$ 线性组合. 否则，设某个 $\alpha\in\Phi^{+}(\gamma)$ 不能如此写出，再选取 $\alpha$，使 $(\gamma,\ \alpha)$ 尽可能小. 显然 $\alpha$ 自己不能在 $\Delta(\gamma)$ 内，故 $\alpha=\beta_1+\beta_2(\beta_i\in\Phi^{+}(\gamma))$，因此 $(\gamma,\ \alpha)=(\gamma,\ \beta_1)+(\gamma,\ \beta_2)$. 但每个 $(\gamma,\ \beta_i)$ 是正的，所以 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 都必须是 $\Delta(\gamma)$ 的非负的 $\mathbf{Z}$ 线性组合(否则与 $(\gamma,\ \alpha)$ 的极小性相矛盾)，故 $\alpha$ 也必须如此. 由这一矛盾就证明了原先的论断.

(2) 若 $\alpha,\ \beta\in\Delta(\gamma)$，$\alpha\neq\beta$，则 $(\alpha,\ \beta)\leqslant 0$. 否则的话，$\alpha-\beta$ 是一个根(引理 9.4)，显然 $\beta$ 不可能是 $-\alpha$，所以 $\alpha-\beta$ 或 $\beta-\alpha$ 在 $\Phi^{+}(\gamma)$ 内. 在第一种情况，$\alpha=\beta+(\alpha-\beta)$，即 $\alpha$ 是可分解的；在第二种情况，$\beta=\alpha+(\beta-\alpha)$，$\beta$ 是可分解的. 这与假设相矛盾.

(3) $\Delta(\gamma)$是线性无关集. 假如 $\sum r_\alpha \alpha = 0$ ($\alpha \in \Delta(\gamma)$, $r_\alpha \in \mathbf{R}$). 把使得 $r_\alpha > 0$ 的指标 $\alpha$ 与使 $r_\alpha < 0$ 的分开，我们可重写成 $\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$ ($s_\alpha$, $t_\beta > 0$, $\alpha$ 的集合与 $\beta$ 的集合不相交). 令 $\varepsilon = \sum s_\alpha \alpha$. 则由(2), $(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{\alpha, \beta} s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leqslant 0$, 迫使 $\varepsilon = 0$. 然后 $0 = (\gamma, \varepsilon) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha)$, 迫使所有 $s_\alpha = 0$. 类似地，所有 $t_\beta = 0$. (这一段论证实际上证明了：严格地位于 E 内一个超平面的同侧，且两两夹成钝角的向量集合必定线性无关.)

(4) $\Delta(\gamma)$是$\Phi$的基. 因为 $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$, 故由于(1), (B2)的要求被满足. 从而 $\Delta(\gamma)$张成 E, 再加上(3)，就导致(B1).

(5) $\Phi$ 的每一个基 $\Delta$ 都有 $\Delta(\gamma)$ 的形式，这里的 $\gamma \in$ E 是正则的. 给出 $\Delta$ 后，选取 $\gamma \in$ E, 使得对所有的 $\alpha \in \Delta$ 满足 $(\gamma, \alpha) > 0$. (这是可能的，因为与 E 的任意基相关联的"正的"开半空间的交集是非空的(练习7).) 由于(B2), $\gamma$ 是正则的，且 $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$, $\Phi^- \subset -\Phi^+(\gamma)$ (因而这二个都是等式). 由于 $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$, $\Delta$ 显然由不可分解元素所组成，即 $\Delta \subset \Delta(\gamma)$. 但 $\mathrm{Card}\,\Delta = \mathrm{Card}\,\Delta(\gamma) = l$, 所以 $\Delta = \Delta(\gamma)$. ∎

下面引入一些术语. 超平面 $P_\alpha$ ($\alpha \in \Phi$)把 E 分成有限个区域, $\mathsf{E} - \bigcup_\alpha P_\alpha$ 的连通分支被称为 E 的(开) **Weyl 房**. 这样，每个正则的 $\gamma \in$ E 恰好属于一个 Weyl 房，记为 $\mathfrak{C}(\gamma)$. $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$就意味着 $\gamma$, $\gamma'$ 位于每一个超平面 $P_\alpha$ ($\alpha \in \Phi$)的同侧，即 $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$, 或 $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. 这说明了 Weyl 房与基之间有一个自然一一对应. 若 $\Delta = \Delta(\gamma)$, 记 $\mathfrak{C}(\Delta) = \mathfrak{C}(\gamma)$, 且称它为**关于 $\Delta$ 的基本 Weyl 房**. $\mathfrak{C}(\Delta)$是开凸集(开半空间的交集)，它由所有满足不等式 $(\gamma, \alpha) > 0$ ($\alpha \in \Delta$)的 $\gamma \in$ E 所组成. 在秩 2 时很容易把相应的图描绘出来，图 1 就是型 $\mathsf{A}_2$ 的图. 这里有 6 个房，其中有阴影的是关于基$\{\alpha, \beta\}$的基本房.

Weyl 群显然把一个 Weyl 房映到另一个上：当 $\sigma \in \mathscr{W}$, $\gamma$ 正则时，$\sigma(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\sigma\gamma)$. 另一方面，$\mathscr{W}$ 把基作置换：$\sigma$ 把 $\Delta$ 映成 $\sigma(\Delta)$, 它仍是一个基(为什么?). $\mathscr{W}$ 的这两种作用实际上是与

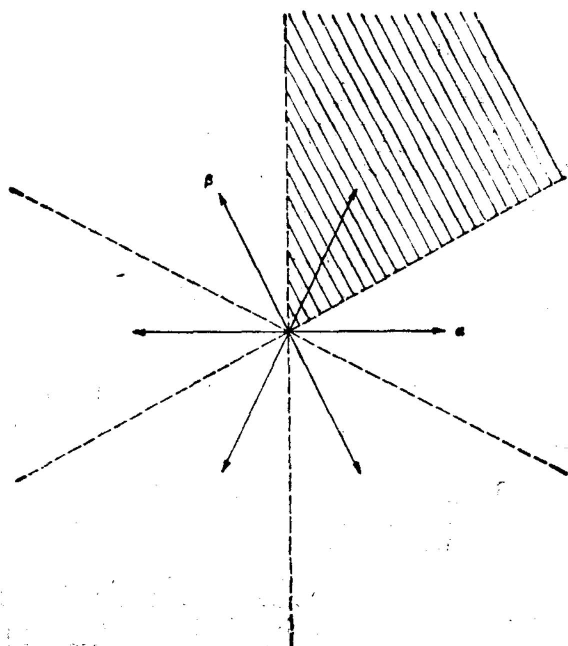



图 1

Weyl 房和基之间的对应关系相一致的. 因为 $(\sigma\gamma, \sigma\alpha)=(\gamma, \alpha)$, 所以有 $\sigma(\Delta(\gamma))=\Delta(\sigma\gamma)$.

## 10.2. 关于素根的引理

设 $\Delta$ 是 $\Phi$ 的固定基. 下面证明关于素根性质的几个非常有用的引理.

**引理 A** 若 $\alpha$ 是正根但不是素根, 则有某个 $\beta\in\Delta$, 使 $\alpha-\beta$ 是一个根(必定是正根).

**证** 若对所有的 $\beta\in\Delta$ 都有 $(\alpha, \beta)\leqslant 0$, 则能应用(10.1)的第(3)步中括号内的注解, 说明 $\Delta\cup\{\alpha\}$ 是线性无关集. 但 $\Delta$ 已经是 E 的基, 故这是不可能的. 因此对某一 $\beta\in\Delta$, 有 $(\alpha, \beta)>0$, 从而 $\alpha-\beta\in\Phi$(由引理 9.4, 因为 $\beta$ 不能与 $\alpha$ 成比例). 记 $\alpha=\sum_{\gamma\in\Delta}k_\gamma\gamma$(所

有的 $k_\gamma \geqslant 0$，且对于 $\gamma \neq \beta$，有某一 $k_\gamma > 0$）．从 $\alpha$ 减去 $\beta$ 就得到素根的 $\mathbf{Z}$-线性组合，其中至少有一个正系数，根据(B2)内表达式的唯一性，迫使所有系数都是正的．▌

**推论** 每一 $\beta \in \Phi^+$ 都可写成 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$（$\alpha_i \in \Delta$，并且不必各不相同）的形式，使得每一个部分和 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ 是一个根．

**证** 使用引理再对 $\mathrm{ht}\,\beta$ 施行归纳法．▌

**引理 B** 设 $\alpha$ 是素根，则 $\sigma_\alpha$ 把异于 $\alpha$ 的正根作一置换．

**证** 设 $\beta \in \Phi^+ - \{\alpha\}$，$\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$ $(k_\gamma \in \mathbf{Z}^+)$．显然 $\beta$ 不与 $\alpha$ 成比例．所以对某一 $\gamma \neq \alpha$，有 $k_\gamma \neq 0$．但在 $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ 里 $\gamma$ 的系数仍是 $k_\gamma$．换句话说，$\sigma_\alpha(\beta)$ 至少有一个正系数（关于 $\Delta$），迫使它是正根．此外因为 $\alpha$ 是 $-\alpha$ 的象，故 $\sigma_\alpha(\beta) \neq \alpha$．▌

**推论** 令 $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta > 0} \beta$，则 $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ 对所有的 $\alpha \in \Delta$ 成立．

**证** 根据上述引理，这是显然的．▌

**引理 C** 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_t \in \Delta$（不必各不相同）．记 $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$．若 $\sigma_1 \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$ 是负根，则对某个指标 $1 \leqslant s < t$，有 $\sigma_1 \cdots \sigma_t = \sigma_1 \cdots \sigma_{s-1} \sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}$．

**证** 记 $\beta_i = \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$，$0 \leqslant i \leqslant t-2$，$\beta_{t-1} = \alpha_t$．因为 $\beta_0 \prec 0$ 以及 $\beta_{t-1} \succ 0$，故可找到使 $\beta_s \succ 0$ 的最小指标 $s$．则 $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$，并且引理 B 迫使 $\beta_s = \alpha_s$．一般说来（引理 9.2），$\sigma \in \mathscr{W}$ 意味着 $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1}$，所以 $\sigma_s = (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{t-1}) \sigma_t (\sigma_{t-1} \cdots \sigma_{s+1})$，这就得出了此引理．▌

**推论** 若 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_t$ 是把 $\sigma \in \mathscr{W}$ 表示成与素根相对应的反射的表达式，并使得 $t$ 最小，则 $\sigma(\alpha_t) \prec 0$．▌

## 10.3. Weyl 群

现在我们能够证明 $\mathscr{W}$ 单可迁地置换了 $\Phi$ 的基（或等价地，置换了 Weyl 房），并且 $\mathscr{W}$ 由关于任一基 $\Delta$ 的"单反射"（即 $\sigma_\alpha$，$\alpha \in \Delta$）所生成．

**定理** 设 $\Delta$ 是 $\Phi$ 的一个基．

(a) 若$\gamma \in E$, $\gamma$正则, 则存在$\sigma \in \mathscr{W}$使得$(\sigma(\gamma), \alpha)>0$对所有的$\alpha \in \Delta$成立(于是$\mathscr{W}$可迁地作用在Weyl房上).

(b) 如果$\Delta'$是$\Phi$的另一个基,则有某一个$\sigma \in \mathscr{W}$,使$\sigma(\Delta')=\Delta$(所以$\mathscr{W}$可迁地作用在基上).

(c) 若$\alpha$是任一根,则存在$\sigma \in \mathscr{W}$,使$\sigma(\alpha) \in \Delta$.

(d) $\mathscr{W}$由$\sigma_\alpha(\alpha \in \Delta)$生成.

(e) 若$\sigma(\Delta)=\Delta$, $\sigma \in \mathscr{W}$, 则$\sigma=1$(所以$\mathscr{W}$单可迁地作用在基上).

**证** 设$\mathscr{W}'$是由所有$\sigma_\alpha(\alpha \in \Delta)$生成的$\mathscr{W}$的子群. 我们将对$\mathscr{W}'$证明(a)~(c),然后再推导出$\mathscr{W}'=\mathscr{W}$.

(a) 记$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$, 且选择$\sigma \in \mathscr{W}'$, 使$(\sigma(\gamma), \delta)$尽可能大. 若$\alpha$是素根, 则$\sigma_\alpha\sigma$当然也在$\mathscr{W}'$内. 而$\sigma$的选取意味着$(\sigma(\gamma), \delta) \geqslant (\sigma_\alpha\sigma(\gamma), \delta)=(\sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta))=(\sigma(\gamma), \delta-\alpha)=(\sigma(\gamma), \delta)-(\sigma(\gamma), \alpha)$(引理10.2B的推论). 这迫使$(\sigma(\gamma), \alpha) \geqslant 0$对所有的$\alpha \in \Delta$成立. 由于$\gamma$是正则的,对任一$\alpha$不可能有$(\sigma(\gamma), \alpha)=0$, 因为这会导致$\gamma$垂直于$\sigma^{-1}\alpha$. 因而所有的不等式都是严格不等式. 从而$\sigma(\gamma)$位于基本Weyl房$\mathfrak{C}(\Delta)$内, 且$\sigma$把$\mathfrak{C}(\gamma)$映到$\mathfrak{C}(\Delta)$.

(b) 既然由(a)可知$\mathscr{W}'$置换了Weyl房, 那么它也可迁地置换$\Phi$的基.

(c) 考虑到(b), 只要证明每一个根至少属于一个基就可以了. 因为与$\alpha$成比例的根只有$\pm\alpha$, 故超平面$P_\beta(\beta \neq \pm\alpha)$与$P_\alpha$不同,因此存在$\gamma \in P_\alpha$, $\gamma \notin P_\beta$(对所有$\beta \neq \pm\alpha$)(为什么?). 选取足够接近$\gamma$的$\gamma'$, 使得$(\gamma', \alpha)=\varepsilon>0$, 而同时$|(\gamma', \beta)|>\varepsilon$对所有的$\beta \neq \pm\alpha$成立. 显然此时$\alpha$属于基$\Delta(\gamma')$.

(d) 要证$\mathscr{W}'=\mathscr{W}$, 只要证明每一反射$\sigma_\alpha(\alpha \in \Phi)$在$\mathscr{W}'$内就够了. 利用(c), 找出$\sigma \in \mathscr{W}'$, 使$\beta=\sigma(\alpha) \in \Delta$. 则$\sigma_\beta=\sigma_{\sigma(\alpha)}=\sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$, 所以$\sigma_\alpha=\sigma^{-1}\sigma_\beta\sigma \in \mathscr{W}'$.

(e) 设$\sigma(\Delta)=\Delta$, 但$\sigma \neq 1$. 如果$\sigma$可写成一个或几个单反射

的乘积(由于(d)，这是可能的)，再取其中长度最小的，则与引理10.2C的推论相矛盾. ▮

可以使用(10.2)的引理，更精细地探究$\mathscr{W}$由单反射生成这一事实的含义是什么.

当$\sigma\in\mathscr{W}$被写成$\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_t}(\alpha_i\in\Delta, t$极小)时，我们称此表达式为简约的，且记$l(\sigma)=t$: 它是$\sigma$关于$\Delta$的长. 由定义，$l(1)=0$. 我们也可用以下的另一种方式刻划$\sigma$的长. 定义$n(\sigma)=$使得$\sigma(\alpha)\prec 0$的正根$\alpha$的个数.

**引理 A** 对所有的$\sigma\in\mathscr{W}$, $l(\sigma)=n(\sigma)$.

**证** 对$l(\sigma)$施行归纳法. $l(\sigma)=0$的情形是显然的: $l(\sigma)=0$意味着$\sigma=1$, 所以$n(\sigma)=0$. 假设引理对所有使$l(\tau)<l(\sigma)$的$\tau\in\mathscr{W}$正确. 把$\sigma$写成简约形式$\sigma=\sigma_{\alpha_1}\cdots\sigma_{\alpha_t}$, 令$\alpha=\alpha_t$. 由引理10.2C的推论，$\sigma(\alpha)\prec 0$. 而引理10.2B又意味着$n(\sigma\sigma_\alpha)=n(\sigma)-1$. 另一方面，$l(\sigma\sigma_\alpha)=l(\sigma)-1<l(\sigma)$，所以由归纳法假设，$l(\sigma\sigma_\alpha)=n(\sigma\sigma_\alpha)$. 合并上述两个结果，即得$l(\sigma)=n(\sigma)$. ▮

然后我们更仔细地看一下$\mathscr{W}$在Weyl房上的单可迁作用(上述定理的(a)与(e)). 后一个引理证明了关于$\Delta$的基本Weyl房的闭包$\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$是$\mathscr{W}$在E上的作用的**基本区域**，即E内每一个向量恰好$\mathscr{W}$共轭于这个集合中的一个点.

**引理 B** 设$\gamma\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. 则对所有的$\sigma\in\mathscr{W}$, 有$\sigma\gamma\prec\gamma$成立. 若$\gamma\in\mathfrak{C}(\Delta)$, 则仅当$\sigma=1$时才有$\sigma\gamma=\gamma$.

**证** 我们可设$\sigma\neq 1$. 记$\sigma=\sigma_{i(1)}\cdots\sigma_{i(t)}$是作为单反射乘积的简约形式，其中$\sigma_i=\sigma_{\alpha_i}$, $\Delta=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$. 显然$\sigma^{-1}$中的每一个部分积$\sigma_{i(t)}\cdots\sigma_{i(s)}$ $(1\leqslant s\leqslant t)$也是简约形式，故引理10.2C的推论意味着$\sigma_{i(t)}\cdots\sigma_{i(s+1)}(\alpha_{i(s)})$是正的. 由于内积关于$\mathscr{W}$不变，我们可以写$(\sigma_{i(s+1)}\cdots\sigma_{i(t)}\gamma, \alpha_{i(s)})=(\gamma, \sigma_{i(t)}\cdots\sigma_{i(s+1)}\alpha_{i(s)})$. 根据对$\gamma$的假设，它是非负的. 换句话说，$\sigma\gamma$是由$\gamma$减去$\alpha_{i(t)}$, $\alpha_{i(t-1)}$, $\cdots$, $\alpha_{i(1)}$的适当倍数而得到的，所以$\sigma\gamma\prec\gamma$. 这一论证还说明，若$\sigma\gamma=\gamma$, 则$\sigma_{i(t)}\gamma=\gamma$或$(\gamma, \alpha_{i(t)})=0$, 所以$\gamma$不能在$\mathfrak{C}(\Delta)$内. ▮

## 10.4. 不可约根系

如果 $\Phi$ 不能分解成两个真子集的并集，使得在一个子集中的每一个根正交于另一个子集中的每一根，则称 $\Phi$ 为不可约的．（在(9.3)里，$A_1, A_2, B_2, G_2$ 是不可约的，但 $A_1\times A_1$ 不是．）假设 $\Delta$ 是 $\Phi$ 的基，则可断言：$\Phi$ 是不可约的当且仅当 $\Delta$ 也不能照刚才所说的那样分解．先证充分性：设 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$，$(\Phi_1, \Phi_2)=0$．除非 $\Delta$ 全部被包含在 $\Phi_1$ 或 $\Phi_2$ 内，否则它总可以诱导出 $\Delta$ 的类似分解．但 $\Delta\subset\Phi_1$ 意味着 $(\Delta, \Phi_2)=0$ 或 $(\mathbf{E}, \Phi_2)=0$，这是因为 $\Delta$ 张成了 $\mathbf{E}$．从而说明了充分性成立．反过来，设 $\Phi$ 为不可约，但 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$，$(\Delta_1, \Delta_2)=0$．因为每一个根共轭于一个素根（定理 10.3(c)），所以 $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$，$\Phi_i$ 是与 $\Delta_i$ 内的根共轭的根的集合．回想起 $(\alpha, \beta)=0$ 意味着 $\sigma_\alpha\sigma_\beta=\sigma_\beta\sigma_\alpha$．既然 $\mathscr{W}$ 由 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 所生成，故从反射公式可以看出，$\Phi_i$ 的每一根都可从 $\Delta_i$ 中的一个根出发，通过加或减 $\Delta_i$ 的元素而得到．因而 $\Phi_i$ 位于由 $\Delta_i$ 张成的 E 的子空间 $E_i$ 内，且看到 $(\Phi_1, \Phi_2)=0$．这就迫使 $\Phi_1=\emptyset$ 或 $\Phi_2=\emptyset$，从而 $\Delta_1=\emptyset$ 或 $\Delta_2=\emptyset$．

**引理 A** 设 $\Phi$ 不可约，则关于半序 $\prec$ 存在唯一的极大根 $\beta$（并且 $\alpha\neq\beta$ 意味着 $\mathrm{ht}\,\alpha<\mathrm{ht}\,\beta$，对所有的 $\alpha\in\Delta$，还有 $(\beta, \alpha)\geqslant 0$ 成立）．若 $\beta=\sum k_\alpha\alpha(\alpha\in\Delta)$，则所有的 $k_\alpha>0$．

**证** 设 $\beta=\sum k_\alpha\alpha$ 是极大的，显然 $\beta\succ 0$．若 $\Delta_1=\{\alpha\in\Delta|k_\alpha>0\}$，$\Delta_2=\{\alpha\in\Delta|k_\alpha=0\}$，则 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ 是一个分解．假定 $\Delta_2$ 非空，则对任一 $\alpha\in\Delta_2$，有 $(\alpha, \beta)\leqslant 0$（可从引理 10.1 推导出）．由于 $\Phi$ 不可约，至少有一个 $\alpha\in\Delta_2$ 不与 $\Delta_1$ 正交，这就迫使有某个 $\alpha'\in\Delta_1$，$(\alpha, \alpha')<0$，所以 $(\alpha, \beta)<0$．这意味着 $\beta+\alpha$ 是一个根（引理 9.4），这与 $\beta$ 的极大性相矛盾．因此 $\Delta_2$ 是空的，且所有的 $k_\alpha>0$．这一论证也说明了 $(\alpha, \beta)\geqslant 0$ 对所有的 $\alpha\in\Delta$ 成立（至少对一个 $\alpha$ 有 $(\alpha, \beta)>0$，因为 $\Delta$ 张成 E）．现在设 $\beta'$ 是另一个极大根．把上述论证应用于 $\beta'$，则 $\beta'$（具有正系数）至少对一个 $\alpha\in\Delta$ 有 $(\alpha, \beta')>0$，因此 $(\beta', \beta)>0$．除去 $\beta=\beta'$ 的情况外，$\beta-\beta'$ 总是一个根（引理

9.4). 但若 $\beta-\beta'$ 是一个根，那么不是 $\beta\prec\beta'$ 就是 $\beta'\prec\beta$，这都是荒谬的. 所以 $\beta$ 是唯一的. ▌

**引理 B** 设 $\Phi$ 不可约，则 $\mathscr{W}$ 作用在 E 上不可约. 特别是，根 $\alpha$ 的 $\mathscr{W}$-轨道张成 E.

**证** 一个根的 $\mathscr{W}$-轨道所张成的子空间是 E 的（非零）$\mathscr{W}$-不变子空间，所以第二个结论可从第一个推导出. 对于第一个结论，设 E′ 是 E 的非零子空间，它在 $\mathscr{W}$ 之下不变. 则 E′ 的正交余空间 E″ 也是 $\mathscr{W}$-不变的，且 $E=E'\oplus E''$. 很容易证明：若 $\alpha\in\Phi$，由于 $\sigma_\alpha(E')=E'$，故不是 $\alpha\in E'$ 就是 $E'\subset P_\alpha$（练习 9.1）. 因此若 $\alpha\notin E'$ 即有 $\alpha\in E''$，所以每一个根必在这两个子空间的一个之中. 于是把 $\Phi$ 分成两个正交子集，迫使这两者之一为空集. 又由于 $\Phi$ 张成 E，可得 $E'=E$. ▌

**引理 C** 设 $\Phi$ 不可约. 则 $\Phi$ 内根的长度至多只有两种，且所有具有同一长度的根都在 $\mathscr{W}$ 下共轭.

**证** 若 $\alpha$, $\beta$ 是任意根，则因为 $\sigma(\alpha)$ 张成了 E（引理 B），故不是所有的 $\sigma(\alpha)(\sigma\in\mathscr{W})$ 都能正交于 $\beta$. 如果 $(\alpha, \beta)\neq 0$，我们知道（见(9.4)），$\alpha$, $\beta$ 的平方长度的比值只可能是 1, 2, 3, 1/2, 1/3. 由上面的两句话很易得出引理的第一个断言：因为如果出现三种根长度，就会得到比例 3/2. 现在设 $\alpha$, $\beta$ 有相同长度. 把其中之一换成 $\mathscr{W}$-共轭元（如上）之后，我们可假定它们不正交（并且不相同，否则就证明完毕了）. 据(9.4)，必须有 $\langle\alpha, \beta\rangle=\langle\beta, \alpha\rangle=\pm1$. 在必要时，把 $\beta$ 换成 $-\beta=\sigma_\beta(\beta)$，我们就可假设 $\langle\alpha, \beta\rangle=1$. 所以 $(\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\alpha)(\beta)=\sigma_\alpha\sigma_\beta(\beta-\alpha)=\sigma_\alpha(-\beta-\alpha+\beta)=\alpha$. ▌

如果 $\Phi$ 不可约，且有两种不同根长度，我们就可称它们为长根或短根.（如果所有的根等长，则我们约定都称它们为长根.）

**引理 D** 设 $\Phi$ 是不可约的，有两种不同根长度. 则引理 A 的极大根 $\beta$ 是长根.

**证** 设 $\alpha\in\Phi$ 是任意的. 只要证明 $(\beta, \beta)\geqslant(\alpha, \alpha)$ 即可. 我们可把 $\alpha$ 替换成它的 $\mathscr{W}$-共轭元，以使 $\alpha$ 位于基本 Weyl 房（关于 $\Delta$）的闭包内. 因为 $\beta-\alpha\succ0$（引理 A），故对任一 $\gamma\in\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ 都有

$(\gamma, \beta-\alpha)\geqslant 0$. 把这一事实应用于 $\gamma=\beta$ (见引理 A)以及 $\gamma=\alpha$, 即可得$(\beta, \beta)\geqslant(\beta, \alpha)\geqslant(\alpha, \alpha)$. ▮

## 练　　习

1. 设 $\Phi^\vee$ 是 $\Phi$ 的对偶系, $\Delta^\vee=\{\alpha^\vee|\alpha\in\Delta\}$. 证明 $\Delta^\vee$ 是 $\Phi^\vee$ 的基. [观察单反射对 $\Delta^\vee$ 的元素的作用效果,且使用定理 10.3.]

2. 若 $\Delta$ 是 $\Phi$ 的基,证明集合$(\mathbf{Z}\alpha+\mathbf{Z}\beta)\cap\Phi(\alpha\neq\beta$都在 $\Delta$ 内)是由$\alpha$, $\beta$张成的 E 的子空间内的秩 2 根系(参看练习 9.7). 推广这一结果到$\Delta$的任意子集.

3. 证明每一个秩 2 根系同构于(9.3)中的一个.

4. 对 $G_2$ 直接验证引理 10.2A 的推论.

5. 若 $\sigma\in\mathscr{W}$ 可写成 $t$ 个单反射的乘积,证明 $t$ 与 $l(\sigma)$有相同的奇偶性.

6. 定义一个函数 $sn$: $\mathscr{W}\to\{\pm1\}$为 $sn(\sigma)=(-1)^{l(\sigma)}$. 证明 $sn$ 是一个同态(参看 $A_2$ 的情形,此时 $\mathscr{W}$ 同构于对称群 $\mathscr{S}_3$).

7. 证明与 E 的任一基 $\gamma_1, \cdots, \gamma_l$ 相伴的"正"开半空间的交集是非空的. [设 $\delta_i$ 是 $\gamma_i$ 到由除 $\gamma_i$ 外其余基向量所张成的子空间的正交余空间上的投影. 考虑 $\gamma=\sum r_i\delta_i$, 其中所有 $r_i>0$.]

8. 设 $\Delta$ 是 $\Phi$ 的一个基,$\alpha\neq\beta$ 是素根, $\Phi_{\alpha\beta}$ 是在 $E_{\alpha\beta}=\mathbf{R}\alpha+\mathbf{R}\beta$ 内的秩 2 根系(见练习 2). $\Phi_{\alpha\beta}$ 的 Weyl 群 $\mathscr{W}_{\alpha\beta}$ 是由 $\sigma_\alpha$, $\sigma_\beta$ 关于 $E_{\alpha\beta}$ 的限制 $\tau_\alpha$, $\tau_\beta$ 所生成, 且 $\mathscr{W}_{\alpha\beta}$ 可看成 $\mathscr{W}$ 的子群. 证明 $\mathscr{W}_{\alpha\beta}$ 内一个元素的"长" (关于 $\tau_\alpha$, $\tau_\beta$) 等于 $\mathscr{W}$ 内相应元素之长.

9. 证明: 存在 $\mathscr{W}$ 的唯一元素 $\sigma$, 它把 $\Phi^+$ 映成 $\Phi^-$ (关于 $\Delta$ 的). 证明$\sigma$的任一简约分解式必须包含所有的 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Delta)$. 讨论 $l(\sigma)$之值.

10. 在 $\Phi$ 内已给出 $\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$, 令 $\lambda=\sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i$($k_i\in\mathbf{Z}$, 且所有的 $k_i\geqslant 0$ 或所有的 $k_i\leqslant 0$). [证明: 或者 $\lambda$ 是一个根的倍数(可以是 0), 或者存在 $\sigma\in\mathscr{W}$, 使 $\sigma\lambda=\sum_{i=1}^{l}k_i'\alpha_i$, 并且某些 $k_i'>0$, 某些 $k_i'<0$. [证明概要: 若 $\lambda$ 不是任一个根的倍数, 则 $\lambda$ 的正交超平面 $P_\lambda$ 不含于$\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$ 内. 取 $\mu\in P_\lambda-\bigcup_{\alpha\in\Phi}P_\alpha$. 然后找一个 $\sigma\in\mathscr{W}$ 使所有的 $(\alpha_i, \sigma\mu)>0$. 由此可得 $0=(\lambda, \mu)=(\sigma\lambda, \sigma\mu)=\sum k_i'(\alpha_i, \sigma\mu)$.]

11. 设 $\Phi$ 是不可约的. 证明 $\Phi^\vee$ 也不可约. 若 $\Phi$ 的所有根有同样长度, 则 $\Phi^\vee$ 也如此(且 $\Phi^\vee$ 同构于 $\Phi$). 另一方面, 若 $\Phi$ 有两种不同的根长度, 则

$\Phi^\vee$ 也如此. 但若 $\alpha$ 是长的, 则 $\alpha^\vee$ 是短的(以及相反的情形). 使用这一事实以证明 $\Phi$ 有一个唯一的极大短根(关于由 $\Delta$ 定义的半序 $\prec$).

12. 设 $\Phi$ 是不可约的. 使用引理 10.3B, 10.4C 以给出 $\Phi$ 具有唯一的极大长根与短根的另一种证明.

13. $\mathscr{W}$ 内的反射都是形如 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 的. [在反射超平面内的向量如果不与任一个根垂直,则它只能被 $\mathscr{W}$ 内的恒等映射所固定.]

14. 证明 E 的每一点都 $\mathscr{W}$-共轭于关于基 $\Delta$ 的基本 Weyl 房的闭包内的一个点. [Weyl 房的并集在 E 内是稠密的.]

【附注】

这里所阐述的乃是 Serre[2] 里的内容的扩展.

# 11. 分 类

在本节中, $\Phi$ 代表秩 $l$ 的根系, $\mathscr{W}$ 是 Weyl 群, $\Delta$ 是 $\Phi$ 的一个基.

## 11.1. $\Phi$ 的 Cartan 矩阵

取定素根的一个序$(\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$. 矩阵$(\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle)$称为 $\Phi$ 的 **Cartan 矩阵**. 它的元素称为 **Cartan 整数**.

**例** 秩 2 根系的 Cartan 矩阵为:

$$\mathsf{A}_1\times\mathsf{A}_1\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix};\quad \mathsf{A}_2\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix};$$

$$\mathsf{B}_2\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix};\quad \mathsf{G}_2\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$$

上述矩阵与选定的序有关, 但这没有什么重大的关系. 最重要的一点是 Cartan 矩阵与 $\Delta$ 的选择无关, 这是由于 $\mathscr{W}$ 可迁地作用在基的集合上(定理 10.3(b)). 因为 $\Delta$ 是 $E$ 的基. 故 Cartan 矩阵是非奇异的((8.5)). 事实证明, Cartan 矩阵完全刻划了 $\Phi$.

**命题** 设 $\Phi'\subset\mathsf{E}'$ 是另一个根系, 带有基 $\Delta'=\{\alpha_1', \cdots, \alpha_l'\}$. 若 $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle=\langle\alpha_i', \alpha_j'\rangle$, $1\leqslant i, j\leqslant l$. 则一一对应 $\alpha_i\mapsto\alpha_i'$ 可以(唯一地)扩张为一个同构 $\phi:\mathsf{E}\to\mathsf{E}'$, 它把 $\Phi$ 映到 $\Phi'$ 上, 且对所有 $\alpha, \beta\in\Phi$ 满足 $\langle\phi(\alpha), \phi(\beta)\rangle=\langle\alpha, \beta\rangle$. 所以 $\Phi$ 的 Cartan 矩阵确定 $\Phi$ 到差

一个同构的程度.

**证** 因为 $\Delta$(相应地: $\Delta'$)是 E(E')的基, 所以存在唯一的向量空间同构 $\phi: E \to E'$, 把 $\alpha_i$ 对应到 $\alpha'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$. 如果 $\alpha, \beta \in \Delta$, 前面的假设保证了 $\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \sigma_{\alpha'}(\beta') = \beta' - \langle \beta', \alpha' \rangle \alpha' = \phi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle \phi(\alpha) = \phi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \phi(\sigma_\alpha(\beta))$. 换句话说, 以下的图对每一个 $\alpha \in \Delta$ 是可交换的:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\phi} & E' \\ {\scriptstyle \sigma_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{\phi(\alpha)}} \\ E & \xrightarrow[\phi]{} & E' \end{array}$$

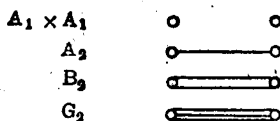
而相应的 Weyl 群 $\mathscr{W}$, $\mathscr{W}'$ 是由单反射生成的 (定理 10.3(d)), 所以映射 $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ 是 $\mathscr{W}$ 到 $\mathscr{W}'$ 上的同构, 它把 $\sigma_\alpha$ 映成 $\sigma_{\phi(\alpha)}$ $(\alpha \in \Delta)$. 但每一个 $\beta \in \Phi$ 在 $\mathscr{W}$ 下共轭于一个素根 (定理 10.3(c)), 譬如说, $\beta = \sigma(\alpha)$ $(\alpha \in \Delta)$. 这就迫使 $\phi(\beta) = (\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1})(\phi(\alpha)) \in \Phi'$. 从而 $\phi$ 把 $\Phi$ 映到 $\Phi'$ 上. 此外, 从反射公式可看出, $\phi$ 保持所有的 Cartan 整数. ∎

上述命题说明: 原则上, 可以从已知的 Cartan 整数作出 $\Phi$. 实际上, 要创造一个能得出所有根(或所有正根)的具体算法并不太困难. 最好的方法也许是考虑根链(9.4). 从高为 1 的根, 即素根出发. 对于任一根偶 $\alpha_i \neq \alpha_j$, 经过 $\alpha_i$ 的 $\alpha_j$-链的整数 $r$ 等于 0(因为据引理 10.1, $\alpha_i - \alpha_j$ 不是根). 所以整数 $q$ 等于 $-\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. 这就使我们能写出所有的高为 2 的根 $\alpha$, 从而知道了整数 $\langle \alpha, \alpha_j \rangle$. 对于每一个高为 2 的根 $\alpha$, 经过 $\alpha$ 的 $\alpha_j$-链的整数 $r$ 很易被确定, 这是因为 $\alpha$ 至多可被 $\alpha_j$ 减去 1 次(为什么?), 根据 $r - q = \langle \alpha, \alpha_j \rangle$, 可以找出 $q$. 只要我们把这一过程重复足够多次, 引理 10.2A 的推论保证所有的正根最终都能这样得到.

## 11.2. Coxeter 图和 Dynkin 图

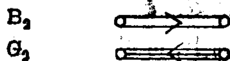
若 $\alpha, \beta$ 是不同的正根, 则我们知道 $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2$ 或 3(9.4). 定义 $\Phi$ 的 **Coxeter** 图为具有 $l$ 个顶点的图, 并且第 $i$ 个

顶点与第 $j$ 个顶点($i\neq j$)用$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle$条边连接起来. 例如:

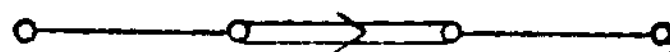



当所有的根等长时,因为此时$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle=\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle$,故 Coxeter 图确定了$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle$. 当涉及到不止一个根长度时(例如 $B_2$ 或 $G_2$),这个图不能告诉我们哪些顶点应该对应短素根,哪些对应长素根(当这些顶点被 2 条或 3 条边连结时). (不过可以证明, Coxeter 图完全确定了 Weyl 群,这主要是因为它确定了 $\mathscr{W}$ 的生成元的乘积的阶. 参看练习 9.3.)

当在 $\Phi$ 的 Coxeter 图中出现 2 条或 3 条边时,我们可以加上一个箭头指向两个根中较短的一个. 这一附加的信息使我们能把 Cartan 整数求出来,把这样得到的图称为 $\Phi$ 的 **Dynkin 图**. (和前面一样,它与素根的编号有关.)例如:




另一个例:给出图



(它与根系 $F_4$ 相关联),读者很容易求出 Cartan 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

## 11.3. 不可约分支

回忆(10.4), $\Phi$ 是不可约的当且仅当 $\Phi$(或等价地, $\Delta$)不能分解成两个正交的真子集. 显然, $\Phi$ 不可约当且仅当它的 Coxeter 图是连通的(在通常意义下). 一般说来, Coxeter 图将会有一些连通分

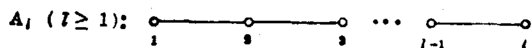
支，设 $\Delta=\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_t$ 是 $\Delta$ 到互相正交的子集的相应分解. 若 $E_i$ 由 $\Delta_i$ 张成，则 $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_t$（正交直和）. 此外，$\Delta_i$ 的 $\mathbf{Z}$-线性组合中是根的那一部分（称这一集合为 $\Phi_i$）显然构成了 $E_i$ 的根系，它的 Weyl 群是 $\mathscr{W}$ 的由所有 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Delta_i)$ 生成的子群在 $E_i$ 上的限制. 最后，每一 $E_i$ 是 $\mathscr{W}$-不变（因为 $\alpha\notin\Delta_i$ 意味着 $\sigma_\alpha$ 作用在 $E_i$ 上是平凡的），所以据练习 9.1 的论证，立即可证每一根必落在某一 $E_i$ 中，即 $\Phi=\Phi_1\cup\cdots\cup\Phi_t$.

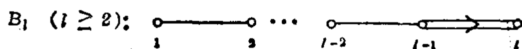
**命题** $\Phi$ 可以（唯一地）分解成不可约根系 $\Phi_i$（它在 $E$ 的子空间 $E_i$ 内）的并集，使得 $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_t$（正交直和）. ∎

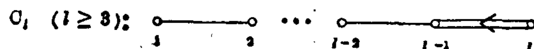
## 11.4. 分类定理

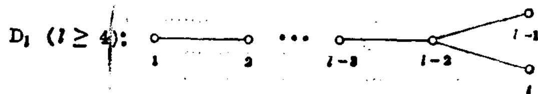
(11.3) 内的讨论说明了只要将不可约根系，或等价地，将连通 Dynkin 图分类就够了（参看命题 11.1）.

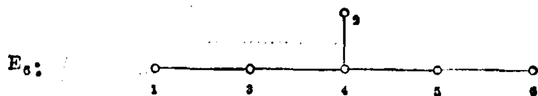
**定理** 若 $\Phi$ 是秩 $l$ 的不可约根系，则它的 Dynkin 图是下面几个中的一个（每一种情形都有 $l$ 个顶点）：

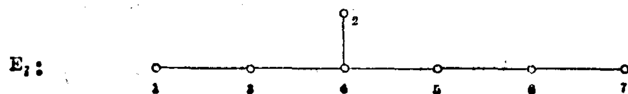
$A_l$ $(l\geq 1)$:



$B_l$ $(l\geq 2)$:


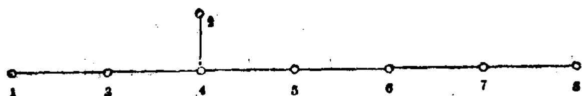

$C_l$ $(l\geq 3)$:



$D_l$ $(l\geq 4)$:


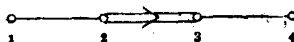

$E_6$:



$E_7$:


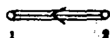
$E_8$:




$F_4$:




$G_2$:




对型 $A_l \sim D_l$ 中的 $l$ 所加的限制是为了避免重迭. 与所标出的素根编号相对应的 Cartan 矩阵在表 1 中给出. 看了上面列出的图后, 可发现除 $B_l$, $C_l$ 外, 所有其它情形的 Dynkin 图都可从 Coxeter 图推导出来. 而 $B_l$ 和 $C_l$ 来自同一个 Coxeter 图, 差别就在于短素根与长素根的相对个数. (这两个根系实际上是互相对偶的, 见练习 5.)

表 1　Cartan 矩阵

$$A_l:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_l:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_l:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_l:\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6:\begin{pmatrix}2&0&-1&0&0&0\\0&2&0&-1&0&0\\-1&0&2&-1&0&0\\0&-1&-1&2&-1&0\\0&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$E_7:\begin{pmatrix}2&0&-1&0&0&0&0\\0&2&0&-1&0&0&0\\-1&0&2&-1&0&0&0\\0&-1&-1&2&-1&0&0\\0&0&0&-1&2&-1&0\\0&0&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$E_8:\begin{pmatrix}2&0&-1&0&0&0&0&0\\0&2&0&-1&0&0&0&0\\-1&0&2&-1&0&0&0&0\\0&-1&-1&2&-1&0&0&0\\0&0&0&-1&2&-1&0&0\\0&0&0&0&-1&2&-1&0\\0&0&0&0&0&-1&2&-1\\0&0&0&0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$F_4:\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-2&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$G_2:\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$$

**定理的证明** 证明的思路是首先将可能的 Coxeter 图分类(忽略根的相对长度),然后再看能得到怎样的 Dynkin 图. 故只要把初等欧氏几何应用于有限的向量集即可, 这些向量间的夹角是由 Coxeter 图所规定的. 因为不考虑长度, 故在此用单位向量的集合来处理可以更容易一些. 为了得到最大限度的适应性, 我们仅作以下的假设: E 是(任意维)欧氏空间, $\mathfrak{A}=\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ 是 $n$ 个线性无关单位向量的集合, 它们满足 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\leqslant 0(i\neq j)$ 以及 $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2=0, 1, 2$ 或 $3(i\neq j)$. 这样的向量集合称为容许的. (例: 一个根系的基的元素, 每个都除以它的长度.) 对每一个集合 $\mathfrak{A}$, 我

们联系一个图 $\Gamma$，正如以前对根系的素根所作的那样：用 $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2$ 条边连接第 $i$ 和第 $j$ 个顶点 $(i\neq j)$. 现在的工作是确定与容许向量集相关联的所有连通图（这包含了所有连通 Coxeter 图）. 下面分几步做，第一步是显然的.（在此并没有假定 $\Gamma$ 是连通的.）

(1) 若舍弃某些 $\varepsilon_i$，则余下的向量仍构成容许集，它的图可从 $\Gamma$ 划去相应的顶点及与它们相连的边而得到.

(2) 在 $\Gamma$ 中至少被一条边相连的顶点对的数目是严格小于 $n$ 的. 置 $\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i$. 因为 $\varepsilon_i$ 是线性无关的，$\varepsilon\neq 0$. 所以 $0<(\varepsilon, \varepsilon)=n+2\sum_{i<j}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$. 设 $i, j$ 是一对（不同的）下标，使 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\neq 0$（即顶点 $i$ 和 $j$ 是相连的）. 则 $4(\varepsilon_i, \varepsilon_j)^2=1, 2$ 或 $3$，特别是，$2(\varepsilon_i, \varepsilon_j)\leqslant -1$. 根据上面的不等式，这样的顶点对的个数不能超过 $n-1$.

(3) $\Gamma$ 不能有圈. 一个圈将是 $\mathfrak{A}$ 的容许子集 $\mathfrak{A}'$ 的图 $\Gamma'$（见(1)），而把 $n$ 换成 Card $\mathfrak{A}'$ 后，可知 $\Gamma'$ 违反(2).

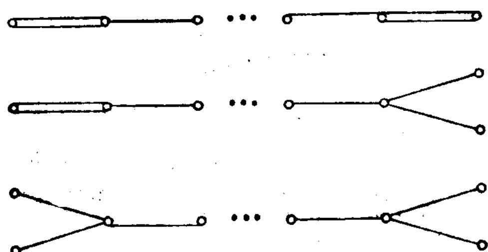
(4) 从 $\Gamma$ 的任一顶点出发的边不能多于 3 条. 假定 $\varepsilon\in\mathfrak{A}$，$\eta_1, \cdots, \eta_k$ 是 $\mathfrak{A}$ 内与 $\varepsilon$ 相连的向量（分别用 1, 2 或 3 条边相连），即 $(\varepsilon, \eta_i)<0$，且 $\varepsilon, \eta_1, \cdots, \eta_k$ 各不相同. 由于(3)，任两个 $\eta$ 均不相连，所以对 $i\neq j$ 有 $(\eta_i, \eta_j)=0$. 因为 $\mathfrak{A}$ 是线性无关的，所以在 $\varepsilon, \eta_1, \cdots, \eta_k$ 张成的子空间内有某一单位向量 $\eta_0$ 与 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 正交；显然对这样的 $\eta_0$，$(\varepsilon, \eta_0)\neq 0$. 现在 $\varepsilon=\sum_{i=0}^{k}(\varepsilon, \eta_i)\eta_i$，故 $1=(\varepsilon, \varepsilon)=\sum_{i=0}^{k}(\varepsilon, \eta_i)^2$. 这迫使 $\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon, \eta_i)^2<1$，或 $\sum_{i=1}^{k}4(\varepsilon, \eta_i)^2<4$. 但 $4(\varepsilon, \eta_i)^2$ 正是在 $\Gamma$ 内连接 $\varepsilon$ 与 $\eta_i$ 的边数.

(5) 一个含有三重边的容许集 $\mathfrak{A}$ 的仅有连通图 $\Gamma$ 是 o≡o（即 Coxeter 图 $G_2$）. 这可从(4)立即推出.

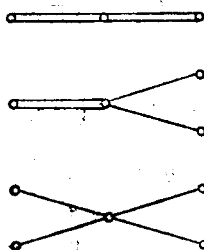
(6) 设 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\}\subset\mathfrak{A}$ 有一个子图 o—o⋯⋯o—o（$\Gamma$ 内一个单链）. 若 $\mathfrak{A}'=(\mathfrak{A}-\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\})\cup\{\varepsilon\}$，$\varepsilon=\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i$，则 $\mathfrak{A}'$ 也是容许集.（把 $\Gamma$ 内的此单链缩成一个点，即得 $\mathfrak{A}'$ 的图.）$\mathfrak{A}'$ 的线性无关性是显然的. 根据假设，$2(\varepsilon_i, \varepsilon_{i+1})=-1\ (1\leqslant i\leqslant k-1)$，所

以$(\varepsilon, \varepsilon)=k+2\sum_{i<j}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=k-(k-1)=1$，即$\varepsilon$是单位向量. 又因任一$\eta\in\mathfrak{A}-\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\}$至多只能与$\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$中的一个相连(据(3))，因此不是$(\eta, \varepsilon)=0$就是对某一$1\leqslant i\leqslant k$有$(\eta, \varepsilon)=(\eta, \varepsilon_i)$，不论哪一种情形，总是$4(\eta, \varepsilon)^2=0, 1, 2$或3.

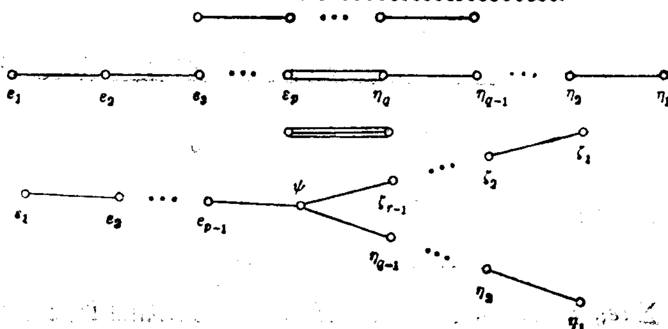
(7) $\Gamma$不含以下形状的子图:



假定在$\Gamma$内出现了上述图中之一. 由(1)，它将是一个容许集的图. 但(6)允许我们将单链换成一个单独的顶点，就导出了以下的图，它们都违反(4):



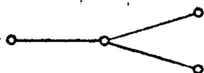
(8) 容许集的任一连通图$\Gamma$都是以下形状之一:



实际上，根据(5)，只有 含有一个三重边。包含有一个以上的两重边的连通图将含有一个子图:

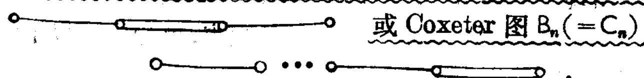


这违反了(7)，所以最多只能有一个两重边．此外，根据(7)，若 $\Gamma$ 有一个两重边，则它不能再含有“分叉点”(分支点):



因此上面画的第二个图是仅有的可能(又因(3)，不可能有圈)．最后设 $\Gamma$ 只有单重边．若 $\Gamma$ 没有分叉点，则它必定是一个单链(仍然因为不可能有圈)．它也不可能包含一个以上的分叉点(由(7))，所以剩下的可能性只有第四图．

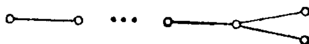
(9) 在(8)内第二种类型的连通图 $\Gamma$ 只可能是 Coxeter 图 $\mathrm{F}_4$:



或 Coxeter 图 $\mathrm{B}_n(=\mathrm{C}_n)$

置 $\varepsilon=\sum\limits_{i=1}^{p} i\varepsilon_i$, $\eta=\sum\limits_{i=1}^{q} i\eta_i$. 由假设，$2(\varepsilon_i,\ \varepsilon_{i+1})=-1=2(\eta_i,\ \eta_{i+1})$，并且其它的向量对是正交的，所以 $(\varepsilon,\ \varepsilon)=\sum\limits_{i=1}^{p} i^2-\sum\limits_{i=1}^{p-1} i(i+1)=p(p+1)/2$, $(\eta,\ \eta)=q(q+1)/2$. 因为 $4(\varepsilon_p,\ \eta_q)^2=2$，也有 $(\varepsilon,\eta)^2=p^2q^2(\varepsilon_p,\ \eta_q)^2=p^2q^2/2$. 因 $\varepsilon,\eta$ 显然线性无关，故 Schwartz 不等式意味着 $(\varepsilon,\eta)^2<(\varepsilon,\varepsilon)(\eta,\eta)$，即 $p^2q^2/2<p(p+1)q(q+1)/4$. 从而 $(p-1)(q-1)<2$. 只有下列的可能性: $p=q=2$(即 $\mathrm{F}_4$)或 $p=1$ ($q$ 任意)，$q=1$($p$ 任意)．

(10) 在(8)内第四种类型的连通图 $\Gamma$ 只能是 Coxeter 图 $\mathrm{D}_n$:



或 Coxeter 图 $\mathrm{E}_n(n=6,\ 7$ 或 $8)$:



置 $\varepsilon=\sum i\varepsilon_i$, $\eta=\sum i\eta_i$, $\zeta=\sum i\zeta_i$. 显然 $\varepsilon,\ \eta,\ \zeta$ 是相互正交的线性

无关向量，且$\psi$不在它们张成的子空间内．如同在(4)的证明中一样，可得$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3<1$，这里的$\theta_1$，$\theta_2$，$\theta_3$是$\psi$与$\varepsilon$，$\eta$，$\zeta$间的夹角．再运用与(9)同样的计算，用$p-1$代$p$，可证$(\varepsilon, \varepsilon)=p(p-1)/2$，对$\eta$，$\zeta$也有类似结果．所以$\cos^2\theta_1=(\varepsilon, \psi)^2/(\varepsilon, \varepsilon)(\psi, \psi)=(p-1)^2(\varepsilon_{p-1}, \psi)^2/(\varepsilon, \varepsilon)=\frac{1}{4}(2(p-1)^2/p(p-1))=(p-1)/2p=\frac{1}{2}(1-1/p)$．对$\theta_2$，$\theta_3$也有类似的式子．把它们相加，即得不等式$\frac{1}{2}(1-1/p+1-1/q+1-1/r)<1$或$1/p+1/q+1/r>1(^*)$．（顺便说一句，这个不等式在数学中已有悠久的历史．）通过改变标号，可设$1/p\leqslant 1/q\leqslant 1/r(\leqslant 1/2$；若$p$，$q$或$r$等于1，就回到型$\mathrm{A}_n$)．而不等式$(^*)$意味着$3/2\geqslant 3/r>1$，所以$r=2$．然后，$1/p+1/q>1/2$，$2/q>1/2$，从而$2\leqslant q<4$．若$q=3$，则$1/p>1/6$，必定$p<6$．因此可能的$(p, q, r)$为：$(p, 2, 2)=\mathrm{D}_n$；$(3, 3, 2)=\mathrm{E}_6$；$(4, 3, 2)=\mathrm{E}_7$；$(5, 3, 2)=\mathrm{E}_8$．

上面的论述已证明了欧氏空间内容许向量集的连通图都可以在型A～G的Coxeter图内找到．并且，根系的Coxeter图必须是其中之一．但除了$\mathrm{B}_l$，$\mathrm{C}_l$外，其它情形的Coxeter图都唯一确定了Dynkin图．因此定理得证．∎

## 练　习

1．验证Cartan矩阵(表1)．

2．计算Cartan矩阵的行列式(对于型$\mathrm{A}_l$～$\mathrm{D}_l$，关于$l$可使用数学归纳法)．它们是：

$\mathrm{A}_l$：$l+1$；$\mathrm{B}_l$：2；$\mathrm{C}_l$：2；$\mathrm{D}_l$：4；$\mathrm{E}_6$：3；$\mathrm{E}_7$：2；$\mathrm{E}_8$，$\mathrm{F}_4$和$\mathrm{G}_2$：1．

3．用(11.1)的算法写出$\mathrm{G}_2$的所有根．对$\mathrm{C}_3$：

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

做同样的工作．

4．证明根系$\Phi$的Weyl群同构于它的不可约分支的相应的Weyl群的直积．

5．证明除 $B_l$，$C_l$ 外，每个不可约根系与它的对偶根系同构．而 $B_l$ 与 $C_l$ 是互相对偶的．

6．证明若一个 Dynkin 图被包含在另一个之中(例如：$E_6$ 在 $E_7$ 内，或 $E_7$ 在 $E_8$ 内)，则可诱导出相应根系的包含关系．

【附注】

我们对分类定理的证明按照 Jacobson[1]．稍有不同的处理方法可参见 Carter[1]．Bourbaki[2]着重于 Coxeter 群的分类，根系的 Weyl 群则是它的重要例子．

## 12．根系和自同构的构造

在 § 11 中，(不可约)根系的可能的(连通) Dynkin 图都被确定了．剩下的是要证明型 A～G 的每一个图确实属于一个根系 $\Phi$．后面还要简单地讨论 Aut $\Phi$．型 $A_l$～$D_l$ 的根系的存在性，可以通过验证 (1.2) 的每一个典型线性李代数的根系确实为所指明的类型而得到证明，当然，这需要首先证明这些代数的半单纯性(见 § 19)．但是要直接构造根系也是十分容易的，这样做，还能弄清 Weyl 群的结构．

### 12.1．型 A～G 的构造

这里我们在空间 $\mathbf{R}^n$ 上进行讨论，此处的内积是按通常的定义，而且 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的通常的规格化正交基．这一基底的 $\mathbf{Z}$-张成是一个格，记为 $I$．在各种情形里，我们将把 E 取为 $\mathbf{R}^n$(或它的一个适当的子空间，带有遗传给它的内积)．然后把 $\Phi$ 定义为 $I$(或 E 的一个与它紧密相联的子群 $J$)里具有某些特定长度的向量全体．

因为群 $I$ (或 $J$)在 $\mathbf{R}^n$ 的通常拓扑下是离散的，而 $\mathbf{R}^n$ 内具有一个或两个已给长度的向量集合是紧致的(它是有界闭的)，因此 $\Phi$ 是有限的，且不含 0．在以下讨论的各种情形里，$\Phi$ 张成 E 是很明显的(实际上，$\Phi$ 的一个基将被列举出来)．从而(R1)被满足．对长度的选取显然将使 (R2) 成立．对于(R3)，只要验证反射 $\sigma_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 把 $\Phi$ 映回 $J$ 内即可，因为此时 $\sigma_\alpha(\Phi)$ 自动地由所给长度的向量所组成．因而(R3)能从(R4)得到．至于(R4)，通常只要选取能整除 2 的平方长度即可，因为此时，所有的内积 $(\alpha, \beta)\in\mathbf{Z}(\alpha,$

$\beta\in I$)自动地成立.

作了这些准备后，现在分别处理情形 A～G. 用刚才概述的方法验证了(R1)到(R4)以后，读者将会看到结果得出的 Cartan 矩阵与表 1(11.4) 内所列举的矩阵是相当的.

$A_l(l\geqslant 1)$：设 E 是 $\mathbf{R}^{l+1}$ 内正交于向量 $\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_{l+1}$ 的 $l$-维子空间. 设 $I'=I\cap E$, 且取 $\Phi$ 为所有使$(\alpha, \alpha)=2$ 的向量 $\alpha\in I'$. 显然 $\Phi=\{\varepsilon_i-\varepsilon_j, i\neq j\}$. 向量 $\alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}(1\leqslant i\leqslant l)$ 是线性无关的，且当 $i<j$ 时，$\varepsilon_i-\varepsilon_j=(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})+(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{i+2})+\cdots+(\varepsilon_{j-1}-\varepsilon_j)$，这说明了它们构成 $\Phi$ 的基. 很清楚，这样就得到 Cartan 矩阵 $A_l$. 最后，注意到关于 $\alpha_i$ 的反射变换了下标 $i$, $i+1$, 且使其它下标保持不变. 因而 $\sigma_{\alpha_i}$ 相当于对称群 $\mathscr{S}_{l+1}$ 内的对换 $(i, i+1)$；这些对换生成了 $\mathscr{S}_{l+1}$, 所以得到了 $\mathscr{W}$ 到 $\mathscr{S}_{l+1}$ 上的自然同构.

$B_l(l\geqslant 2)$：设 $E=\mathbf{R}^l$, $\Phi=\{\alpha\in I\mid(\alpha, \alpha)=1$ 或 $2\}$. 很易验证 $\Phi$ 由向量 $\pm\varepsilon_i$(平方长度 1) 以及向量 $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)(i\neq j)$(平方长度 2) 所组成. $l$ 个向量 $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\varepsilon_2-\varepsilon_3$, $\cdots$, $\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l$, $\varepsilon_l$ 是线性无关的. 短根 $\varepsilon_i=(\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1})+(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_{i+2})+\cdots+(\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l)+\varepsilon_l$, 长根 $\varepsilon_i-\varepsilon_j$ 或 $\varepsilon_i+\varepsilon_j$ 也可类似地表达出来. 这一个 (有序) 基的 Cartan 矩阵显然是 $B_l$. $\mathscr{W}$ 的作用相当于由所有置换以及集合$\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l\}$ 的变号所组成的群，因此 $\mathscr{W}$ 同构于$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l$ 与 $\mathscr{S}_l$ 的半直积(后者作用于前者上).

$C_l(l\geqslant 3)$：$C_l(l\geqslant 2)$ 可以被看作与 $B_l$ 对偶的根系 ($B_2=C_2$)，参看练习 11.5. 读者可直接验证：在 $E=\mathbf{R}^l$ 内，所有的 $\pm 2\varepsilon_i$ 以及所有的 $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)(i\neq j)$ 组成了型 $C_l$ 的根系，其基为$\{\varepsilon_1-\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l, 2\varepsilon_l\}$. 当然 Weyl 群同构于 $B_l$ 的 Weyl 群.

$D_l(l\geqslant 4)$：设 $E=\mathbf{R}^l$, $\Phi=\{\alpha\in I\mid(\alpha, \alpha)=2\}=\{\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j), i\neq j\}$. 取 $l$ 个线性无关的向量 $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, $\cdots$, $\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l$, $\varepsilon_{l-1}+\varepsilon_l$ 作为基，就可得到 $D_l$. Weyl 群是置换以及集合 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_l\}$ 的只涉及到偶数个变号的群. 所以 $\mathscr{W}$ 同构于 $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}$ 与 $\mathscr{S}_l$ 的半直积.

$E_6$, $E_7$, $E_8$：我们知道 $E_6$, $E_7$ 可以典范地看作 $E_8$ 的子系(练习

11.6)，所以只要构造 $E_8$ 就够了．这样做稍微复杂些．取 $E=\mathbf{R}^8$，$I'=I+\mathbf{Z}((\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_8)/2)$，$I''=I'$ 的子群，它由使 $\sum c_i$ 为偶数的所有元素 $\sum c_i\varepsilon_i+\frac{c}{2}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_8)$ 所组成．（验证它是一个子群！）定义 $\Phi=\{\alpha\in I''\mid(\alpha,\ \alpha)=2\}$．很容易看到 $\Phi$ 由明显的向量 $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)(i\neq j)$ 以及不那么明显的向量 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{k(i)}\varepsilon_i(k(i)=0,\ 1$，且加在一起是一个偶整数）所组成．通过验算可知，所有的内积都在 $\mathbf{Z}$ 内（这是必须验证的，因为我们遇到的是比 $I$ 更大的格）．作为一个基，我们取 $\left\{\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_8-(\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_7)),\ \varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \varepsilon_2-\varepsilon_1,\ \varepsilon_3-\varepsilon_2,\ \varepsilon_4-\varepsilon_3,\ \varepsilon_5-\varepsilon_4,\ \varepsilon_6-\varepsilon_5,\ \varepsilon_7-\varepsilon_6\right\}$．（已被排列成与（11.4）表 1 的 Cartan 矩阵 $E_8$ 相对应的次序．）希望读者自己考虑 Weyl 群的作用情况，可以证明它的阶是 $2^{14}3^55^27$．

$F_4$：设 $E=\mathbf{R}^4$，$I'=I+\mathbf{Z}((\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)/2)$，$\Phi=\{\alpha\in I'\mid(\alpha,\ \alpha)=1$ 或 $2\}$，则 $\Phi$ 由所有的 $\pm\varepsilon_i$，所有的 $\pm(\varepsilon_i\pm\varepsilon_j)(i\neq j)$ 以及所有的 $\pm\frac{1}{2}(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2\pm\varepsilon_3\pm\varepsilon_4)$（符号可任意选取）所组成．经验证，所有的数 $\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 都是整数．作为基，可取 $\{\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \varepsilon_3-\varepsilon_4,\ \varepsilon_4,\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-\varepsilon_4)\}$．这里 $\mathscr{W}$ 的阶是 1152．

$G_2$：在 § 9 我们已明显地构造了 $G_2$．抽象地看，可取 $E$ 为 $\mathbf{R}^3$ 内正交于 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ 的子空间，$I'=I\cap E$，$\Phi=\{\alpha\in I'\mid(\alpha,\ \alpha)=2$ 或 $6\}$．从而 $\Phi=\pm\{\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ \varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \varepsilon_1-\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3,\ 2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2\}$．作为基，可选 $\varepsilon_1-\varepsilon_2,\ -2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$．（$\mathscr{W}$ 是如何作用的？）

**定理** 对于型 A～G 的每一个 Dynkin 图（或 Cartan 矩阵），存在具有已给图的不可约根系．∎

## 12.2. $\Phi$ 的自同构

我们将对各个根系 $\Phi$ 给出 Aut $\Phi$ 一个完全的描述．引

理 9.2 意味着 $\mathscr{W}$ 是 Aut$\Phi$ 的正规子群（练习 9.6）. 设 $\Gamma=\{\sigma\in \mathrm{Aut}\Phi \mid \sigma(\Delta)=\Delta\}$，$\Delta$ 是 $\Phi$ 的一个固定基. 显然 $\Gamma$ 是 Aut$\Phi$ 的子群，若 $\tau\in\Gamma\cap\mathscr{W}$，则由于 $\mathscr{W}$ 的单可迁性（定理 10.3(e)），$\tau=1$. 此外，若 $\tau\in \mathrm{Aut}\Phi$ 是任意的，则 $\tau(\Delta)$ 显然是 $\Phi$ 的另一个基，所以存在 $\sigma\in\mathscr{W}$，使 $\sigma\tau(\Delta)=\Delta$（定理 10.3(b)），故 $\tau\in\Gamma\mathscr{W}$. 由此可见：Aut $\Phi$ 是 $\Gamma$ 与 $\mathscr{W}$ 的半直积.

对所有的 $\tau\in \mathrm{Aut}\Phi$ 以及所有的 $\alpha,\beta\in\Phi$，我们有 $\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\tau(\alpha),\tau(\beta)\rangle$. 所以每一个 $\tau\in\Gamma$ 确定了 $\Phi$ 的 Dynkin 图的一个自同构（在显而易见的意义下）. 若 $\tau$ 作用在图上是平凡的，则 $\tau=1$（因为 $\Delta$ 张成 E）. 另一方面，Dynkin 图的每一个自同构显然确定了 $\Phi$ 的一个自同构（见命题 11.1）. 所以 $\Gamma$ 可等同于图自同构的群. 只要看一下(11.4)中所列举的图，就能得到 $\Gamma$ 的描述. 将它与其它有用的材料收集在一起，对于不可约的 $\Phi$ 可列成表 1.（因为不是恒等变换的图自同构只能存在于同一根长度的情形下，所以此时 Dynkin 图与 Coxeter 图是一致的.）

表 1

| 型 | 正根数 | $\mathscr{W}$ 的阶 | $\mathscr{W}$ 的结构 | $\Gamma$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_l$ | $\binom{l+1}{2}$ | $(l+1)!$ | $\mathscr{S}_{l+1}$ | $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\ (l\geqslant 2)$ |
| $B_l$, $C_l$ | $l^2$ | $2^l l!$ | $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^l\rtimes\mathscr{S}_l$ | 1 |
| $D_l$ | $l^2-l$ | $2^{l-1}l!$ | $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{l-1}\rtimes\mathscr{S}_l$ | $\begin{cases}\mathscr{S}_3\ (l=4)\\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\ (l>4)\end{cases}$ |
| $E_6$ | 36 | $2^7\cdot 3^4\cdot 5$ | | $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ |
| $E_7$ | 63 | $2^{10}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$ | | 1 |
| $E_8$ | 120 | $2^{14}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7$ | | 1 |
| $F_4$ | 24 | $2^7\cdot 3^2$ | | 1 |
| $G_2$ | 6 | $2^2\cdot 3$ | $\mathscr{D}_6$ | 1 |

## 练　　习

1. 验证(12.1)内构造的细节.
2. 验证表 2.

表 2　最高长根与短根

| 型 | 长　根 | 短　根 |
|---|---|---|
| $A_l$ | $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l$ | |
| $B_l$ | $\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\cdots+2\alpha_l$ | $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l$ |
| $C_l$ | $2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l$ | $\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l$ |
| $D_l$ | $\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_l$ | |
| $E_6$ | $\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6$ | |
| $E_7$ | $2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7$ | |
| $E_8$ | $2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+6\alpha_4+5\alpha_5+4\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8$ | |
| $F_4$ | $2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$ | $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4$ |
| $G_2$ | $3\alpha_1+2\alpha_2$ | $2\alpha_1+\alpha_2$ |

3．设 $\Phi\subset E$ 满足 (R1)，(R3)，(R4)，但不满足(R2)．(参看练习 9.9.) 此外，假设 $\Phi$ 在 § 11 的意义下为不可约．证明 $\Phi$ 是 E 内($n=\dim E$)型 $B_n$，$C_n$ 的根系的并集，其中 $B_n$ 的长根也是 $C_n$ 的短根．(这在文献中称为型 $BC_n$ 的非约化根系.)

4．证明 $G_2$ 的长根构成 E 内型 $A_2$ 的根系．

5．在构造 $C_l$ 时，如果把 $\Phi$ 刻划成 $I$ 内所有平方长度为 2 或 4 的向量集合，是否正确？试说明之．

6．证明映射 $\alpha\mapsto-\alpha$ 是 $\Phi$ 的一个自同构．试确定对哪些不可约的 $\Phi$，属于 Weyl 群．

7．当 $\Phi$ 不是不可约时，描述 Aut $\Phi$.

【附注】

这里的处理方法按照 Serre[2]．关于各个根系的更多信息可在 Bourbaki[2] 内找到．

# 13．权的抽象理论

在本节内我们将叙述半单纯李代数的表示理论中仅与根系有关的那一部分．(这些要到第六章才用得到.) 设 $\Phi$ 是欧氏空间 E 的根系，Weyl 群为 $\mathscr{W}$.

## 13.1．权

设 $\Lambda$ 是所有使得 $\langle\lambda,\alpha\rangle\in\mathbf{Z}(\alpha\in\Phi)$ 的 $\lambda\in E$ 的集合，它的元素

称为权．因为$\langle\lambda, \alpha\rangle=2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha)$关于$\lambda$是线性的，所以$\Lambda$是E的子群，且包含$\Phi$．用$\Lambda_r$表示根格(=由$\Phi$生成的$\Lambda$的子群)．$\Lambda_r$是E内的格：它是E的一个$\mathbf{R}$基(譬如说，任一素根集)的$\mathbf{Z}$张成．固定一个基$\Delta\subset\Phi$后，当$\lambda\in\Lambda$且所有整数$\langle\lambda, \alpha\rangle(\alpha\in\Delta)$为非负时，定义$\lambda$为**支配权**；若这些整数都是正的，则称$\lambda$为**强支配权**．设$\Lambda^+$是所有支配权的集合．按(10.1)的语言，$\Lambda^+$是所有位于基本Weyl房$\mathfrak{C}(\Delta)$的闭包内的权的集合，而$\Lambda\cap\mathfrak{C}(\Delta)$则是强支配权的集合．

若$\Delta=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$，则向量$2\alpha_i/(\alpha_i, \alpha_i)$仍构成E的基．设$\lambda_1, \cdots, \lambda_l$是它的对偶基(关于E上内积)：$2(\lambda_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)=\delta_{ij}$．因为所有的$\langle\lambda_i, \alpha\rangle(\alpha\in\Delta)$都是非负整数，故$\lambda_i$是支配权，称它们为(关于$\Delta$的)**基本支配权**．请注意$\sigma_i\lambda_j=\lambda_j-\delta_{ij}\alpha_i$．

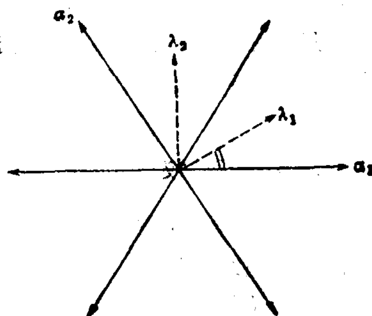



图 1

若$\lambda\in E$是任意一个权，令$m_i=\langle\lambda, \alpha_i\rangle$．则$0=\langle\lambda-\sum m_i\lambda_i, \alpha\rangle$对每一素根$\alpha$都成立，这意味着$(\lambda-\sum m_i\lambda_i, \alpha)=0$或$\lambda=\sum m_i\lambda_i$．所以$\Lambda$是具有基$(\lambda_i, 1\leqslant i\leqslant l)$的格，且$\lambda\in\Lambda^+$当且仅当所有$m_i\geqslant 0$．(对于型$A_2$，可见图1.)

关于格的一个基本事实是：$\Lambda/\Lambda_r$必须是有限群(称为$\Phi$的基本群)．我们可直接看出这一点：记$\alpha_i=\sum_j m_{ij}\lambda_j\ (m_{ij}\in\mathbf{Z})$，则$\langle\alpha_i, \alpha_k\rangle=\sum_j m_{ij}\langle\lambda_j, \alpha_k\rangle=m_{ik}$．换句话说，Cartan矩阵表达了基的变化情况．为了写出$\lambda_j$用$\alpha_i$的表示式，我们只要求出Cartan矩阵的逆阵，它的行列式(见练习11.2)是所涉及到的仅有的分母，所以这就度量了$\Lambda_r$在$\Lambda$内的指数．例如在型$A_1$内，$\alpha_1=2\lambda_1$．(由于以后将会变得明显的原因，只有在这一种情况里，素根也是支配权．)在型$A_2$内，Cartan矩阵是$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，所以$\alpha_1=2\lambda_1-\lambda_2$，

$\alpha_2=-\lambda_1+2\lambda_2$. 求逆后可得$(1/3)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，使得 $\lambda_1=(1/3)(2\alpha_1+\alpha_2)$，$\lambda_2=(1/3)(\alpha_1+2\alpha_2)$. 通过计算 Cartan 矩阵的行列式，在不可约情形，可以证明基本群 $\Lambda/\Lambda_r$ 的阶为：

$$\mathrm{A}_l:\ l+1;\quad \mathrm{B}_l,\ \mathrm{C}_l,\ \mathrm{E}_7:\ 2;\quad \mathrm{D}_l:\ 4;$$

$$\mathrm{E}_6:\ 3;\quad \mathrm{E}_8,\ \mathrm{F}_4,\ \mathrm{G}_2:\ 1.$$

将 $\lambda_i$ 用 $\alpha_j$ 明显地表示出来是不难的. 为了方便于读者，特地将这些信息列在表 1 内. 基本群的精确结构可从计算初等因子或从表 1 导出来(练习 4).

## 13.2. 支 配 权

$\Phi$ 的 Weyl 群 $\mathscr{W}$ 保持 E 上内积，所以 $\Lambda$ 不变. (事实上我们已作了更精细的观察：$\sigma_i\lambda_j=\lambda_j-\delta_{ij}\alpha_i$.) 在 $\mathscr{W}$ 作用下，权的轨道常常在表示论的研究中遇到. 根据引理 10.3B，可得以下事实：

**引理 A** 每一个权在 $\mathscr{W}$ 下，共轭于一个且仅有一个支配权. 若 $\lambda$ 是支配权，则对于任一个 $\sigma\in\mathscr{W}$，都有 $\sigma\lambda\prec\lambda$. 且若 $\lambda$ 是强支配权，则仅当 $\sigma=1$ 时，才有 $\sigma\lambda=\lambda$. ∎

作为 E 的子集，以下的关系可使 $\Lambda$ 成为半序集：$\lambda\succ\mu$ 当且仅当 $\lambda-\mu$ 是正根之和(10.1). 缺陷是，这一序与支配性并没有密切的联系：例如，很容易找到支配权 $\mu$，使 $\mu\prec\lambda$，但 $\lambda$ 不是支配权(练习 2). 不过下面的引理说明了关于 $\prec$，支配权的性质还不算太差.

表 1

$$\mathrm{A}_l:\quad \lambda_i=\frac{1}{l+1}[(l-i+1)\alpha_1+2(l-i+1)\alpha_2+\cdots+(i-1)(l-i+1)\alpha_{i-1}$$
$$+i(l-i+1)\alpha_i+i(l-i)\alpha_{i+1}+\cdots+i\alpha_l]$$

$$\mathrm{B}_l:\quad \lambda_i=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(i-1)\alpha_{i-1}+i(\alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_l)\quad(i<l)$$
$$\lambda_l=\frac{1}{2}(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+l\alpha_l)$$

$$\mathrm{C}_l:\quad \lambda_i=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(i-1)\alpha_{i-1}+i\left(\alpha_i+\cdots+\alpha_{l-1}+\frac{1}{2}\alpha_l\right)$$

$D_l$: $\lambda_i=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(i-1)\alpha_{i-1}+i(\alpha_i+\cdots+\alpha_{l-2})+\frac{1}{2}i(\alpha_{l-1}+\alpha_l)\quad(i<l-1)$

$\lambda_{l-1}=\frac{1}{2}\left(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(l-2)\alpha_{l-2}+\frac{1}{2}l\alpha_{l-1}+\frac{1}{2}(l-2)\alpha_l\right)$

$\lambda_l=\frac{1}{2}\left(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+(l-2)\alpha_{l-2}+\frac{1}{2}(l-2)\alpha_{l-1}+\frac{1}{2}l\alpha_l\right)$

（以下把$\sum q_i\alpha_i$简写为$(q_1, \cdots, q_l)$.）

$E_6$: $\lambda_1=\frac{1}{3}(4, 3, 5, 6, 4, 2)$

$\lambda_2=(1, 2, 2, 3, 2, 1)$

$\lambda_3=\frac{1}{3}(5, 6, 10, 12, 8, 4)$

$\lambda_4=(2, 3, 4, 6, 4, 2)$

$\lambda_5=\frac{1}{3}(4, 6, 8, 12, 10, 5)$

$\lambda_6=\frac{1}{3}(2, 3, 4, 6, 5, 4)$

$E_7$: $\lambda_1=(2, 2, 3, 4, 3, 2, 1)$

$\lambda_2=\frac{1}{2}(4, 7, 8, 12, 9, 6, 3)$

$\lambda_3=(3, 4, 6, 8, 6, 4, 2)$

$\lambda_4=(4, 6, 8, 12, 9, 6, 3)$

$\lambda_5=\frac{1}{2}(6, 9, 12, 18, 15, 10, 5)$

$\lambda_6=(2, 3, 4, 6, 5, 4, 2)$

$\lambda_7=\frac{1}{2}(2, 3, 4, 6, 5, 4, 3)$

$E_8$: $\lambda_1=(4, 5, 7, 10, 8, 6, 4, 2)$

$\lambda_2=(5, 8, 10, 15, 12, 9, 6, 3)$

$\lambda_3=(7, 10, 14, 20, 16, 12, 8, 4)$

$\lambda_4=(10, 15, 20, 30, 24, 18, 12, 6)$

$\lambda_5=(8, 12, 16, 24, 20, 15, 10, 5)$

$\lambda_6=(6, 9, 12, 18, 15, 12, 8, 4)$

$\lambda_7=(4, 6, 8, 12, 10, 8, 6, 3)$

$\lambda_8=(2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 2)$

$F_4$: $\lambda_1=(2, 3, 4, 2)$

$\lambda_2=(3, 6, 8, 4)$

$\lambda_3=(2, 4, 6, 3)$

$\lambda_4=(1, 2, 3, 2)$

$G_2$: $\lambda_1=(2, 1)$

$\lambda_2=(3, 2)$

**引理 B** 设$\lambda\in\Lambda^+$,则支配权$\mu\prec\lambda$的个数有限.

**证** 由于$\lambda+\mu\in\Lambda^+$,且$\lambda-\mu$是正根之和, $0\leqslant(\lambda+\mu,\ \lambda-\mu)=(\lambda,\ \lambda)-(\mu,\ \mu)$. 于是$\mu$落在紧致集$\{x\in E\mid(x,\ x)\leqslant(\lambda,\ \lambda)\}$内,故它与离散集$\Lambda^+$的交集是有限的. ▌

## 13.3. 权 δ

回忆一下(引理 10.2B 的推论), $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\succ0}\alpha$, 且$\sigma_i\delta=\delta-\alpha_i$ $(1\leqslant i\leqslant l)$. 当然, $\delta$可以在根格$\Lambda_r$内, 也可以不在$\Lambda_r$内(见型$A_1$); 但$\delta$在$\Lambda$内. 更精确地说:

**引理 A** $\delta=\sum_{j=1}^{l}\lambda_j$. 所以$\delta$是(强)支配权.

**证** 因为$\sigma_i\delta=\delta-\alpha_i$, 故$(\delta-\alpha_i,\ \alpha_i)=(\sigma_i^2\delta,\ \sigma_i\alpha_i)=(\delta,\ -\alpha_i)$或$2(\delta,\ \alpha_i)=(\alpha_i,\ \alpha_i)$, 即$\langle\delta,\ \alpha_i\rangle=1(1\leqslant i\leqslant l)$. 但$\delta=\sum_i\langle\delta,\ \alpha_i\rangle\lambda_i$ (见(13.1)),由此可得引理. ▌

下一个引理只是一个辅助性的结果.

**引理 B** 设$\mu\in\Lambda^+$, $\nu=\sigma^{-1}\mu(\sigma\in\mathscr{W})$. 则$(\nu+\delta,\ \nu+\delta)\leqslant(\mu+\delta,\ \mu+\delta)$,仅当$\nu=\mu$时,等式成立.

**证** $(\nu+\delta,\ \nu+\delta)=(\sigma(\nu+\delta),\ \sigma(\nu+\delta))=(\mu+\sigma\delta,\ \mu+\sigma\delta)=(\mu+\delta,\ \mu+\delta)-2(\mu,\ \delta-\sigma\delta)$. 因为$\mu\in\Lambda^+$,且$\delta-\sigma\delta$是正根之和(引理 13.2A 与 13.3A),故右边$\leqslant(\mu+\delta,\ \mu+\delta)$, 仅当$(\mu,\ \delta-\sigma\delta)=0$时才有等式成立,即$(\mu,\delta)=(\mu,\sigma\delta)=(\nu,\delta)$,或$(\mu-\nu,\delta)=0$. 但$\mu-\nu$是正根之和(引理 13.2A)且$\delta$是强支配的, 故$\mu=\nu$. ▌

## 13.4. 饱和权集

某些在$\mathscr{W}$下不变的有限权集在表示理论中起着突出的作用. 若$\Pi$是$\Lambda$的一个子集, 如果对所有的$\lambda\in\Pi$, $\alpha\in\Phi$以及在0与$\langle\lambda,\ \alpha\rangle$之间的$i$,权$\lambda-i\alpha$也在$\Pi$内,则称$\Pi$为饱和的. 首先注意:任一饱和集是自动地关于$\mathscr{W}$不变的,这是因为$\sigma_\alpha\lambda=\lambda-\langle\lambda,\ \alpha\rangle\alpha$,

且 $\mathscr{W}$ 由反射生成．若 $\lambda\in\Pi$，且对所有的 $\mu\in\Pi$ 有 $\mu\prec\lambda$，则称饱和集 $\Pi$ 具有首权 $\lambda(\lambda\in\Lambda^+)$．例：(1)由单独一个 0 组成的集合是饱和的，有首权 0；(2) 半单纯李代数所有根的集合 $\Phi$ 加上 0 后，是饱和的．当 $\Phi$ 为不可约时，存在唯一的(关于 $\Phi$ 的固定基 $\Delta$ 的)最高根(引理 10.4A)．所以 $\Pi$ 以这个根作为它的首权(为什么?)．

**引理 A** 具有首权 $\lambda$ 的饱和权集必定是有限的．

**证** 利用引理 13.2B．▌

**引理 B** 设 $\Pi$ 是具有首权 $\lambda$ 的饱和权集．若 $\mu\in\Lambda^+$ 且 $\mu\prec\lambda$，则 $\mu\in\Pi$．

**证** 假设 $\mu'=\mu+\sum_{\alpha\in\Delta}k_\alpha\alpha\in\Pi(k_\alpha\in\mathbf{Z}^+)$．(重要的是：我们并不假设 $\mu'$ 是支配的．)在此要说明：如何把 $k_\alpha$ 一个接一个地减小，同时又使它始终留在 $\Pi$ 内．如果能够这样做，那么 $\mu\in\Pi$．当然，我们的出发点是：$\lambda$ 本身就是这样的一个 $\mu'$．现在假设 $\mu'\neq\mu$，所以某些 $k_\alpha$ 是正的．从 $(\sum_\alpha k_\alpha\alpha,\ \sum_\alpha k_\alpha\alpha)>0$，我们可推得对某一使 $k_\beta>0$ 的 $\beta\in\Delta$，有 $(\sum_\alpha k_\alpha\alpha,\ \beta)>0$．尤其是，$\langle\sum_\alpha k_\alpha\alpha,\ \beta\rangle$ 是正的．因为 $\mu$ 是支配权，$\langle\mu,\ \beta\rangle$ 是非负的，所以 $\langle\mu',\ \beta\rangle$ 是正的．据饱和集的定义，可知 $\mu'$ 减去一个 $\beta$ 后仍留在 $\Pi$ 中，这样就把 $k_\beta$ 减少 1．▌

根据引理 B，就能得出具有首权 $\lambda$ 的饱和集 $\Pi$ 的一幅清晰的图画：$\Pi$ 由所有在半序内低于或等于 $\lambda$ 的支配权，添上它们在 $\mathscr{W}$ 下的共轭元所组成．特别是，对于给定的 $\lambda\in\Lambda^+$，至多只能存在一个这样的集合 $\Pi$．反之，给出了 $\lambda\in\Lambda^+$，只要定义 $\Pi$ 为由所有低于 $\lambda$ 的支配权添上它们的 $\mathscr{W}$-共轭元所成的集合．因为 $\Pi$ 在 $\mathscr{W}$ 下不变，可以看出它是饱和的(练习 10)，且由于引理 13.2A，$\Pi$ 以 $\lambda$ 为首权．

在结束本节前，下面要证明一个不等式，它对于 Freudenthal 公式的应用是重要的．

**引理 C** 设 $\Pi$ 是具有首权 $\lambda$ 的饱和集．若 $\mu\in\Pi$，则 $(\mu+\delta,$

$\mu+\delta)\leqslant(\lambda+\delta,\ \lambda+\delta)$，仅当 $\mu=\lambda$ 时才有等式成立.

**证** 由于引理 13.3B，只要当 $\mu$ 是支配权时加以证明即可. 记 $\mu=\lambda-\pi$，这里 $\pi$ 是正根之和，则 $(\lambda+\delta,\ \lambda+\delta)-(\mu+\delta,\ \mu+\delta)=(\lambda+\delta,\ \lambda+\delta)-(\lambda+\delta-\pi,\ \lambda+\delta-\pi)=(\lambda+\delta,\ \pi)+(\pi,\ \mu+\delta)\geqslant(\lambda+\delta,\ \pi)\geqslant 0$，这里的不等号是因为 $\mu+\delta$ 和 $\lambda+\delta$ 都是支配的. 由于 $\lambda+\delta$ 是强支配的，仅当 $\pi=0$ 时才有等号成立. ∎

## 练　习

1. 设 $\Phi=\Phi_1\cup\cdots\cup\Phi_t$ 是 $\Phi$ 到它的不可约分支的分解，使 $\Delta=\Delta_1\cup\cdots\cup\Delta_t$. 证明 $\Lambda$ 分解为直和 $\Lambda_1\oplus\cdots\oplus\Lambda_t$. 问 $\Lambda^+$ 又如何?

2. 用例子说明(例如对 $A_2$)$\lambda\notin\Lambda^+$, $\alpha\in\Delta$, $\lambda-\alpha\in\Lambda^+$ 是可能的.

3. 验证表 1 内的某些数据，例如对 $F_4$.

4. 利用表 1 证明 $A_l$ 的基本群是 $l+1$ 阶循环群，而 $D_l$ 的基本群同构于 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$($l$ 奇数)或 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$($l$ 偶数). (因为 $A_3=D_3$，很容易记住它们的相应关系.)

5. 若 $\Lambda'$ 是 $\Lambda$ 的任意一个包含 $\Lambda_r$ 的子群，证明 $\Lambda'$ 是 $\mathscr{W}$-不变的. 于是我们得到一个同态 $\phi$: $\operatorname{Aut}\Phi/\mathscr{W}\to\operatorname{Aut}(\Lambda/\Lambda_r)$. 证明 $\phi$ 是内射的. 然后推出: $-1\in\mathscr{W}$ 当且仅当 $\Lambda_r\supset 2\Lambda$ (见练习 12.6). 证明 $-1\in\mathscr{W}$ 恰好对以下不可约根系: $A_1$, $B_l$, $C_l$, $D_l$($l$ 是偶数), $E_7$, $E_8$, $F_4$, $G_2$ 成立.

6. 证明: 当 $\Phi$ 为不可约时，在 $\Phi$ 内是支配权的根恰好就是最高长根以及(如果有两个根长度)最高短根(参看 10.4 以及练习 10.11).

7. 若 $\varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_l$ 是欧氏空间 E 的钝基(即对 $i\neq j$，所有 $(\varepsilon_i,\ \varepsilon_j)\leqslant 0$)，证明对偶基是锐基(即对 $i\neq j$，所有 $(\varepsilon_i^*,\ \varepsilon_j^*)\geqslant 0$). [简化到 $l=2$ 的情形.]

8. 设 $\Phi$ 为不可约，不使用表 1 的数据，证明每个 $\lambda_i$ 是形如 $\sum\limits_j q_{ij}\alpha_j$ 的，这里所有的 $q_{ij}$ 是正有理数. [从练习 7 推得所有的 $q_{ij}$ 为非负. 由 $(\lambda_i,\ \lambda_i)>0$ 可得 $q_{ii}>0$. 然后证明若 $q_{ij}>0$，$(\alpha_j,\ \alpha_k)<0$，则 $q_{ik}>0$.]

9. 设 $\lambda\in\Lambda^+$. 证明仅当 $\sigma=1$ 时，$\sigma(\lambda+\delta)-\delta$ 才是支配权.

10. 若 $\lambda\in\Lambda^+$，证明由所有支配权 $\mu\prec\lambda$ 以及它们的 $\mathscr{W}$-共轭元所成的集合 $\Pi$ 是饱和的，正如(13.4)内所断言的.

11. 证明 $\Lambda$ 的每一子集被包含于一个唯一的最小饱和集内. 若这些子集是有限的，此饱和集也是有限的.

12. 对型 $A_2$ 的根系，写下 Weyl 群的每一元素作用在 $\lambda_1$, $\lambda_2$ 上的效果.

使用这些数据确定哪些权属于首权为 $\lambda_1+3\lambda_2$ 的饱和权集. 对于型 $G_2$ 以及首权 $\lambda_1+2\lambda_2$, 做同样的事.

13. 若 $\lambda\in\Lambda^+$, 并且 $\mu\in\Lambda^+$, $\mu\prec\lambda$ 意味着 $\mu=\lambda$ 时, 称 $\lambda$ 为**极小权**. 证明 $\Lambda_r$ 在 $\Lambda$ 内的每一个陪集恰好含有一个极小的 $\lambda$. 证明 $\lambda$ 是极小权当且仅当 $\lambda$ 的 $\mathscr{W}$-轨道是饱和集(首权为 $\lambda$); 当且仅当 $\lambda\in\Lambda^+$ 以及对所有的根 $\alpha$, 有 $\langle\lambda, \alpha\rangle=0, 1, -1$. 对每一个不可约的 $\Phi$, 确定(使用表 1)非零极小权 $\lambda$ 如下:

$A_l$: $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$

$B_l$: $\lambda_l$

$C_l$: $\lambda_1$

$D_l$: $\lambda_1, \lambda_{l-1}, \lambda_l$

$E_6$: $\lambda_1, \lambda_6$

$E_7$: $\lambda_7$

【附注】

本节的部分材料来自 Bourbaki[2] 的第 6 章, §1, No.9～10(及练习 23)中的正文与练习. 为了强调根系所起的作用, 已稍微超出了通常在表示论以外的内容.

# 第四章　同构定理与共轭定理

## 14. 同构定理

我们现在回到第二章的情形：$L$ 是特征数 0 的代数闭域 F 上的半单纯李代数，$H$ 是 $L$ 的极大环面子代数，$\Phi\subset H^*$ 是 $L$ 关于 $H$ 的根集．在(8.5)中已证明，$\Phi$ 在 $H^*$ 内的有理张成空间在 $\mathbb{Q}$ 上是 $l$ 维的，$l=\dim_F H^*$．把基域从 $\mathbb{Q}$ 扩张成 $\mathbb{R}$ 后，我们就能得到由 $\Phi$ 张成的 $l$-维实向量空间 E．此外，与 Killing 型对偶的对称双线性型被携带到 E 上，使 E 成为一个欧氏空间．然后由定理 8.5 肯定了 $\Phi$ 是 E 内的一个根系．

本节的目的是证明具有相同根系的两个半单纯李代数是自同构的．实际上，可证明更精细的命题，它能导致构造出某些自同构．

### 14.1．化简到单纯的情形

**命题**　设 $L$ 是单纯李代数，$H$ 和 $\Phi$ 同上．则 $\Phi$ 是(10.4)意义下的不可约根系．

**证**　假设不是这样．则 $\Phi$ 分解为 $\Phi_1\cup\Phi_2$，这里 $\Phi_i$ 是正交的．若 $\alpha\in\Phi_1$，$\beta\in\Phi_2$，则 $(\alpha+\beta,\ \alpha)\neq0$，$(\alpha+\beta,\ \beta)\neq0$，所以 $\alpha+\beta$ 不是根，$[L_\alpha L_\beta]=0$．这说明了由所有的 $L_\alpha(\alpha\in\Phi_1)$ 所生成的 $L$ 的子代数 $K$ 被所有的 $L_\beta(\beta\in\Phi_2)$ 所中心化；特别是因为 $Z(L)=0$，所以 $K$ 是 $L$ 的真子代数．不仅如此，$K$ 还被所有 $L_\alpha(\alpha\in\Phi_1)$ 正规化，从而被所有的 $L_\alpha(\alpha\in\Phi)$，以至被 $L$ 所正规化（命题 8.4(f)）．所以 $K$ 是 $L$ 的异于 0 的真理想，这与 $L$ 的单纯性相矛盾．∎

接着设 $L$ 是任意半单纯李代数，则 $L$ 可唯一地写成单纯理想的直和 $L_1\oplus\cdots\oplus L_t$（定理 5.2）．若 $H$ 是 $L$ 的极大环面子代数，则 $H=H_1\oplus\cdots\oplus H_t$，这里 $H_i=L_i\cap H$（见练习 5.8）．显然每一 $H_i$ 是 $L_i$ 内的环面代数，事实上还是极大环面的：因为 $L_i$ 的任一

大于 $H_i$ 的环面子代数将自动地在 $L$ 内是环面的，它中心化所有的 $H_j(j\neq i)$，且与它们一起生成 $L$ 的一个环面子代数，这个环面子代数将大于 $H$. 用 $\Phi_i$ 表示实向量空间 $\mathsf{E}_i$ 内 $L_i$ 关于 $H_i$ 的根系. 若 $\alpha\in\Phi_i$，我们可在规定 $\alpha(H_j)=0$(对 $j\neq i$)后，把 $\alpha$ 看成 $H$ 上的线性函数. 此时 $\alpha$ 显然是 $L$ 关于 $H$ 的一个根，$L_\alpha\subset L_i$. 反之，若 $\alpha\in\Phi$，则对某一 $i$ 有 $[H_iL_\alpha]\neq 0$(否则 $H$ 将中心化 $L_\alpha$)，此时 $L_\alpha\subset L_i$，所以 $\alpha|_{H_i}$ 是 $L_i$ 关于 $H_i$ 的根. 这一讨论证明了 $\Phi$ 可以分解成 $\Phi_1\cup\cdots\cup\Phi_t$，$\mathsf{E}\cong\mathsf{E}_1\oplus\cdots\oplus\mathsf{E}_t$(见(11.3))。从上述命题可得:

**推论** 设 $L$ 是半单纯李代数，具有极大环面子代数 $H$ 和根系 $\Phi$. 若 $L=L_1\oplus\cdots\oplus L_t$ 是 $L$ 的单纯理想分解，则 $H_i=H\cap L_i$ 是 $L_i$ 的极大环面子代数，相应的(不可约)根系 $\Phi_i$ 可以被典范地看作 $\Phi$ 的子系，使得 $\Phi=\Phi_1\cup\cdots\cup\Phi_t$ 是 $\Phi$ 到不可约分支的分解. ∎

这一推论把通过根系刻划半单纯李代数的问题简化为通过不可约根系刻划单纯李代数的问题.

## 14.2. 同 构 定 理

首先选出 $L$ 的生成元的一个子集合.

**命题** 设 $L$ 是半单纯李代数，$H$ 是 $L$ 的极大环面子代数，$\Phi$ 是 $L$ 关于 $H$ 的根系. 固定 $\Phi$ 的一个基 $\Delta$(10.1)，则 $L$ 由根空间 $L_\alpha$, $L_{-\alpha}(\alpha\in\Delta)$ 所生成(作为李代数)；或等价地，$L$ 由任意的非零根向量 $x_\alpha\in L_\alpha$, $y_\alpha\in L_{-\alpha}(\alpha\in\Delta)$ 所生成.

**证** 设 $\beta$ 是(关于 $\Delta$ 的)任意正根. 据引理 10.2A 的推论，$\beta$ 可写成 $\beta=\alpha_1+\cdots+\alpha_s$，这里 $\alpha_i\in\Delta$，且每个部分和 $\alpha_1+\cdots+\alpha_i$ 都是根. 我们也知道(命题 8.4(d)) $[L_\gamma L_\delta]=L_{\gamma+\delta}$，只要 $\gamma$, $\delta$, $\gamma+\delta\in\Phi$ 即可. 对 $s$ 施行归纳法，很易看出 $L_\beta$ 位于由所有 $L_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 生成的 $L$ 的子代数内. 类似地若 $\beta$ 是负的，则 $L_\beta$ 位于由所有 $L_{-\alpha}(\alpha\in\Delta)$ 生成的 $L$ 的子代数内. 但 $L=H+\coprod_{\alpha\in\Phi}L_\alpha$, $H=\sum_{\alpha\in\Phi}[L_\alpha L_{-\alpha}]$，所以命题得证. ∎

若 $0\neq x_\alpha\in L_\alpha$, $0\neq y_\alpha\in L_{-\alpha}(\alpha\in\Delta)$, $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$, 则称 $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ 或 $\{x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\}$ 为 $L$ 的**标准生成元集**. 请回忆: $h_\alpha$ 是 $[L_\alpha L_{-\alpha}]$ 内使 $\alpha$ 取值为 2 的唯一元素.

若 $(L, H)$ 和 $(L', H')$ 是两个偶: 每个偶都由一个单纯李代数和一个极大环面子代数组成. 我们要证明: 相应的(不可约)根系 $\Phi$, $\Phi'$ 的一个同构将诱导出把 $H$ 映到 $H'$ 上的 $L$ 到 $L'$ 上的一个同构. 由定义, 同构 $\Phi\rightarrow\Phi'$ 是由包围它们的欧氏空间的同构 $E\rightarrow E'$ 所诱导, 而后者不必是等距变换. 不过, 如果我们把 $E$ 或 $E'$ 上的内积乘以一个正实数, 是不会影响根系的公理的. 所以, 可以假设同构 $\Phi\rightarrow\Phi'$ 来自欧氏空间的等距变换. 然后再注意同构 $\Phi\rightarrow\Phi'$ 唯一地扩张成向量空间的同构 $\psi: H^*\rightarrow H'^*$(因为 $\Phi$ 张成 $H^*$, $\Phi'$ 张成 $H'^*$). 接着再借助 Killing 型把 $H$, $H'$ 等同于它们的对偶空间, $\psi$ 就诱导出一个同构 $\pi: H\rightarrow H'$. 很清楚, 若 $\alpha\mapsto\alpha'$ 表示已给的映射 $\Phi\mapsto\Phi'$, 则 $\pi(t_\alpha)=t'_{\alpha'}$, 这里的 $t_\alpha$ 和 $t'_{\alpha'}$ 对应于 $\alpha$ 与 $\alpha'$ (借助 Killing 型). 因为所给出的 $\Phi$ 与 $\Phi'$ 的同构来自相应的欧氏空间的等距变换, 又因 $h_\alpha=2t_\alpha/(\alpha, \alpha)$, 故也有 $\pi(h_\alpha)=h'_{\alpha'}$.

因为 $H$, $H'$ 是 abelian 李代数, $\pi$ 甚至可被看作李代数的同构. 下面需要的是如何把 $\pi$ 扩张为同构 $L\rightarrow L'$(仍记为 $\pi$). 如果这一扩张存在, 那么可看出: 它必定对所有的 $\alpha\in\Phi$ 把 $L_\alpha$ 映到 $L'_{\alpha'}$ 上. 现在就产生了这样的问题: 相应于已给的 $x_\alpha\in L_\alpha$, 它在 $L'_{\alpha'}$ 内的象元素究竟在多大范围内可预先指定? 显然, 各个 $x'_{\alpha'}(\alpha'\in\Phi')$ 的选取不可能是完全任意的: 譬如, 若选取 $x_\alpha$, $x_\beta$, $x_{\alpha+\beta}$ 满足 $[x_\alpha x_\beta]=x_{\alpha+\beta}$, 则必须选取 $x'_{\alpha'+\beta'}=[x'_{\alpha'}x'_{\beta'}]$. 这些讨论启发我们把注意力集中于素根上, 它们的选取可以独立地作出来.

**定理** 设 $L$, $L'$ 是 F 上的单纯李代数, 相应的对于极大环面子代数 $H$, $H'$ 和根系 $\Phi$, $\Phi'$, 假设有一个 $\Phi$ 到 $\Phi'$ 上的同构(记为 $\alpha\mapsto\alpha'$), 它诱导了 $\pi: H\rightarrow H'$. 取定一个基 $\Delta\subset\Phi$, 则 $\Delta'=\{\alpha'\mid\alpha\in\Delta\}$ 是 $\Phi'$ 的基. 对每一个 $\alpha\in\Delta$, $\alpha'\in\Delta'$, 选取任意的(非零) $x_\alpha\in L_\alpha$, $x'_{\alpha'}\in L'_{\alpha'}$(即选择一个任意的李代数同构 $\pi_\alpha: L_\alpha\rightarrow L'_{\alpha'}$); 则存在唯一的同构 $\pi: L\rightarrow L'$, 它扩张了 $\pi: H\rightarrow H'$ 以及所有的 $\pi_\alpha(\alpha\in\Delta)$.

**证** $\pi$ 的唯一性（如果存在的话）是立即可得出的：$x_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 确定了唯一的 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$，使 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$，根据前述命题，$L$ 由 $x_\alpha$，$y_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 生成。

存在性证明的思想是不难理解的。若 $L$ 和 $L'$ 本质上相同，那么它们的直和 $L\oplus L'$（具有仅有的单纯理想 $L$，$L'$ 的半单纯李代数）应该包含一个与 $L\oplus L$ 的"对角"子代数$\{(x,\ x)\mid x\in L\}$相类似的子代数 $D$，它在 $L\oplus L'$ 到各个因子的射影下同构于 $L$。很容易构造 $L\oplus L'$ 的一个合适的子代数 $D$：如上所述，$x_\alpha(\alpha\in\Delta)$ 确定了唯一的 $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ 使$[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$，在 $L'$ 内也可做类似的工作。令 $D$ 是由元素 $\bar{x}_\alpha=(x_\alpha,\ x'_{\alpha'})$，$\bar{y}_\alpha=(y_\alpha,\ y'_{\alpha'})$，$\bar{h}_\alpha=(h_\alpha,\ h'_{\alpha'})$（对 $\alpha\in\Delta$，$\alpha'\in\Delta'$）所生成的。主要的问题是证明 $D$ 是一个真子代数。设想 $D$ 包含有诸如$(x_\alpha,\ x'_{\alpha'})$以及$(x_\alpha,\ 2x'_{\alpha'})$那样的元素，其中对某些根 $\alpha$，$\alpha'$，有 $x_\alpha\in L_\alpha$，$x'_{\alpha'}\in L'_{\alpha'}$。那么 $D$ 将包含 $L'$ 的所有元素，然后包含 $L$ 的所有元素，以至于 $L\oplus L'$ 的所有元素（读者很易验证）。但要直接看出不可能发生这样的现象是困难的，所以需间接地进行。

因为 $L$，$L'$ 是单纯的，故 $\Phi$ 和 $\Phi'$ 不可约（命题 14.1）。所以 $\Phi$，$\Phi'$ 有极大根 $\beta$，$\beta'$（关于 $\Delta$，$\Delta'$），它们当然在已知同构 $\Phi\to\Phi'$ 下互相对应（(10.4)引理 A）。任选非零的 $x\in L_\beta$，$x'\in L'_{\beta'}$。置 $\bar{x}=(x,\ x')\in L\oplus L'$，且设 $M$ 是 $L\oplus L'$ 的子空间，它由所有的 $\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_1}\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_2}\cdots\mathrm{ad}\,\bar{y}_{\alpha_m}(\bar{x})$ (*)，$\alpha_i\in\Delta$（允许重复）所张成．显然(*)属于 $L_{\beta-\Sigma\alpha_i}\oplus L'_{\beta'-\Sigma\alpha'_i}$，并且 $M\cap(L_\beta\oplus L'_{\beta'})$只有一维，这使得 $M$ 是 $L\oplus L'$ 的真子空间。

可以断定：子代数 $D$ 使 $M$ 不变。对此通过观察 $D$ 的生成元来证实。由定义，$\mathrm{ad}\,\bar{y}_\alpha(\alpha\in\Delta)$使 $M$ 不变，又根据$[hy_\alpha]$是 $y_\alpha$ 的倍元这一事实，应用归纳法，可以看出 $\mathrm{ad}\,\bar{h}_\alpha$ 同样使 $M$ 不变。另一方面，对素根 $\alpha$，当素根 $\gamma\neq\alpha$ 时，$\alpha-\gamma$ 不是根（引理 10.1），故 $\mathrm{ad}\,x_\alpha$ 与 $\mathrm{ad}\,y_\gamma$ 都可交换。如果用 $\mathrm{ad}\,\bar{x}_\alpha$ 作用在(*)上，就可使它越过每一个 $\mathrm{ad}\,\bar{y}_\gamma$ 往后移动，直至遇到 $\mathrm{ad}\,\bar{y}_\alpha$，此时引入了一个附加的加项（涉及到 $\mathrm{ad}\,\bar{h}_\alpha$ 的）。但我们已考虑过这一类的项。又因为只要 $\alpha\in\Delta$，就有 $\mathrm{ad}\,\bar{x}_\alpha(\bar{x})=0$（根据 $\beta$ 的极大性，$\alpha+\beta\notin\Phi$），故最终我们可看

出 ad $\bar{x}_\alpha$ 使 $M$ 不变.

现在很清楚: $D$ 是真子代数. 否则 $M$ 就会是 $L \oplus L'$ 的真非零理想, 但 $L$, $L'$ 是仅有的真非零理想(定理 5.2), 并且明显地 $M \neq L$, $M \neq L'$.

我们又可断言: $D$ 到 $L \oplus L'$ 的第一个因子与第二个因子上的投影是(李代数)同构. 由一般的原理可知这些投影是李代数同态, 又由于前述命题以及 $D$ 的定义方法, 可知它们还是满射. 另一方面, 假设 $D$ 与 $L$ 有非零交集(=到第二个因子上的投影的核). 这意味着 $D$ 包含某些$(w, 0)$, $w \neq 0$, 所以 $D$ 也包含所有的 $(\mathrm{ad}\, z_{\alpha_1} \cdots \mathrm{ad}\, z_{\alpha_t}(w), 0)$, 其中 $\pm\alpha_i \in \Delta$, $z_\alpha = x_\alpha$ 或 $y_\alpha$. 这些元素构成 $L$ 的非零理想(据前述命题), 它必须是 $L$ 自己($L$ 为单纯). 这样, $D$ 包含 $L$. 由于对称性, $D$ 也一定包含 $L'$, 从而包含 $L \oplus L'$, 这是不可能的.

最后, 可以看到, 通过 $D$ 所得到的同构 $L \to L'$ 把 $x_\alpha$ 映成 $x'_{\alpha'}(\alpha \in \Delta)$, $h_\alpha$ 映成 $h'_{\alpha'}$, 从而在 $H$ 上与 $\pi$ 重合, 这正是我们所期望的. ∎

这一定理很容易被推广到半单纯李代数 (练习 1). 在此还要提一下的是: 受前述命题的启发, 同构定理还可有一个更有力的证明方法. 也就是说, 利用生成元 $x_\alpha$, $y_\alpha$, $h_\alpha(\alpha \in \Delta)$ 以及适当的关系式, 将 $L$ 明晰地展示出来, 并这样选择关系式: 使得所涉及的一切常数仅仅依赖于根系 $\Phi$. 此时, 具有与 $\Phi$ 同构的根系的任一其它单纯李代数 $L'$ 将自动地同构于 $L$. 经过一些准备后, 这一证明将在后面给出(§ 18), 虽不算初等, 但有一个优点, 即同时能导出半单纯李代数的存在定理.

### 14.3. 自 同 构

同构定理可被用来证明半单纯李代数 $L$ 的自同构的存在性 ($H$, $\Phi$ 同前): $\Phi$ 的任一自同构确定了 $H$ 的自同构, 后者又能被扩张到 $L$ 上. 作为一个有用的例子, 取这样的映射, 使每个根映到它的负根. 它显然属于 $\mathrm{Aut}\,\Phi$ (见练习 12.6), 且 $H$ 上的诱导映

射把 $h$ 变成 $-h$. 特别是，若 $\sigma: H \to H$ 是这一同构，则 $\sigma(h_\alpha) = -h_\alpha$，由于命题 8.3(g)，它就是 $h_{-\alpha}$. 为了应用定理 14.2，我们规定 $x_\alpha$ 应该映成 $-y_\alpha(\alpha \in \Delta)$. (注意到使 $[-y_\alpha z] = h_{-\alpha}$ 的唯一的 $z \in L_\alpha$ 正是 $-x_\alpha$.) 按照定理，$\sigma$ 扩张成 $L$ 的自同构，它把 $x_\alpha$ 映成 $-y_\alpha(\alpha \in \Delta)$. 而上面括号里的一段话又意味着 $y_\alpha$ 被映成 $-x_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$. 此外，因为 $\sigma^2$ 使 $L$ 的生成元集不变，故 $\sigma$ 是 2 阶的. 归结起来：

**命题** $L$ 如同定理 14.2(但不必是单纯的). 取定(非零的) $x_\alpha \in L_\alpha(\alpha \in \Delta)$，设 $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ 满足 $[x_\alpha y_\alpha] = h_\alpha$. 则存在 $L$ 的自同构 $\sigma$，它是 2 阶的，且满足 $\sigma(x_\alpha) = -y_\alpha$, $\sigma(y_\alpha) = -x_\alpha(\alpha \in \Delta)$, $\sigma(h) = -h(h \in H)$. ∎

对于 $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$，自同构 $\sigma$ 已在(2.3)内被讨论过.

$\Phi$ 的 Weyl 群 $\mathscr{W}$ 占据了 $\Phi$ 的大部分自同构(12.2). 定理 14.2 保证了由 $\mathscr{W}$ 在 $H$ 上的作用扩张而得的相应的 $L$ 的自同构的存在. 若 $\sigma \in \mathscr{W}$，则由 $\sigma$ 扩张成的 $L$ 的自同构必定把 $L_\beta$ 映成 $L_{\sigma\beta}$. (当然可用不同的办法调整所涉及到的纯量因子.) 我们也可直接构造这样的 $L$ 自同构，它以 (2.3) 的讨论为基础且独立于定理 14.2. 只要对反射 $\sigma_\alpha$ $(\alpha \in \Phi)$ 做到这一些就够了. 由于 $\text{ad}\, x_\beta$ $(\beta \in \Phi)$ 是幂零的，故可以定义内自同构 $\tau_\alpha = \exp \text{ad}\, x_\alpha \cdot \exp \text{ad}(-y_\alpha) \cdot \exp \text{ad}\, x_\alpha$，其中 $[x_\alpha y_\alpha] = h_\alpha$. $\tau_\alpha$ 作用在 $H$ 上的效果如何? 记 $H = \text{Ker}\,\alpha \oplus \mathsf{F}h_\alpha$. 显然对所有的 $h \in \text{Ker}\,\alpha$，有 $\tau_\alpha(h) = h$，而 $\tau_\alpha(h_\alpha) = -h_\alpha$(2.3). 所以 $\tau_\alpha$ 和 $\sigma_\alpha$ 在 $H$ 上一致. 此外，$\tau_\alpha$ 把 $L_\beta$ 映成 $L_{\sigma_\alpha\beta}$.

这样用 $\text{Int}\, L$ 的元素表示反射(从而表示 $\mathscr{W}$ 的任意元素)的方法有一个不可避免的缺点：通常它不能使 $\mathscr{W}$ 实现为 $\text{Int}\, L$ 的一个子群(见练习 5).

## 练　习

1. 把定理 14.2 推广到 $L$ 半单纯的情形.

2. 设 $L = \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. 若 $H$, $H'$ 是 $L$ 的任两个极大环面子代数，证明存

在 $L$ 的自同构，它把 $H$ 映到 $H'$ 上.

3. 证明：仔细选择 $x$ 和 $x'$ 后，在定理 14.2 的证明中引入的 $L\oplus L'$ 的子空间 $M$ 实际上就等于 $D$.

4. 设 $\sigma$ 是定理 14.3 中所述的. 对不是素根的 $\alpha$，是否也必定 $\sigma(x_\alpha)=-y_\alpha$? 这里 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$.

5. 考虑型 $\mathrm{A}_2$ 的单纯代数 $\mathfrak{sl}(3, \mathrm{F})$. 证明由 (14.3) 中的自同构 $\tau_\alpha$ 所生成的 $\mathrm{Int}\, L$ 的子群严格地大于 Weyl 群(这里是 $\mathscr{S}_3$). [把 $\mathrm{Int}\, L$ 看作矩阵群，并明显地把 $\tau_\alpha^2$ 计算出来.]

6. 使用定理 14.2 构造 $\mathrm{Aut}\, L$ 的一个子群 $\Gamma(L)$，它同构于 $\Phi$ 的所有图自同构(12.2)的群.

7. 对每一典型代数 (1.2)，说明如何选取对应于 $\Phi$ 的基的元素 $h_\alpha\in H$ (见练习 8.2).

【附注】

定理 14.2 的证明取自 Winter[1]. 在 (14.3) 中讨论的自同构 $\sigma$ 将在 § 25 中被用来构造 $L$ 的一个"Chevalley 基"(也请参见练习 25.7).

## 15. Cartan 子代数

在 § 14 内，我们证明了，由一个半单纯李代数和一个极大环面子代数所组成的偶 $(L, H)$ 被它的根系 $\Phi$ 确定到相差一个同构. 不过可以设想，另一个极大环面子代数 $H'$ 可能导致一个完全不同的根系 $\Phi'$. (当然在很多情形下这可以通过使用 § 11 的分类被排除掉，这是因为 $\dim L=\mathrm{rank}\,\Phi+\mathrm{Card}\,\Phi$. 但是，从这一观点来看，型 $\mathrm{B}_l$ 和 $\mathrm{C}_l$ 是无法区分的!)

为了证明 $L$ 单独确定了 $\Phi$，当然只要证明 $L$ 的所有极大环面子代数在 $\mathrm{Aut}\, L$ 下共轭就够了. 这将在 § 16 中做到，不过这是在与任意李代数 $L$ 的更广泛的联系下做到的，在那里，$H$ 的更合适的类似者是"Cartan 子代数". 这一更广泛的联系由于可以利用可解李代数的特殊性质，而使得证明更容易了. 在本节内我们将准备好一个骨架. 这里的 F 除了特别申明外，可以是任意特征的. 为了技术上的方便，我们仍要求 F 是代数闭的，但这也可被减弱为：对于主要的结果，只要 $\mathrm{Card}\,\mathrm{F}$ 相对于 $\dim L$ 而言不是"太小"就够了.

## 15.1. $L$ 关于 ad $x$ 的分解

从(4.2)回想起，若 $t\in\operatorname{End}V$($V$ 是有限维向量空间)，则 $V$ 是所有 $V_a=\operatorname{Ker}(t-a\cdot 1)^m$ 的直和，其中 $m$ 是 $a$ 作为 $t$ 的特征多项式的根的重数. 每一 $V_a$ 在 $t$ 下是不变的，而且 $t$ 在 $V_a$ 上的限制是一个纯量 $a$ 和一个幂零自同态之和.

这特别适用于一个元素 $x$ 在李代数 $L$ 上的伴随作用. 记 $L=\coprod_{a\in F}L_a(\operatorname{ad}x)=L_0(\operatorname{ad}x)\oplus L_*(\operatorname{ad}x)$，这里 $L_*(\operatorname{ad}x)$ 表示那些 $L_a(\operatorname{ad}x)(a\neq 0)$ 的和. 更一般地，如果 $K$ 是 $L$ 的一个子代数，它在 ad $x$ 下不变，则可写为 $K=K_0(\operatorname{ad}x)\oplus K_*(\operatorname{ad}x)$，甚至 $x\notin K$ 也可以.

引理　若 $a, b\in\mathbf{F}$，则 $[L_a(\operatorname{ad}x), L_b(\operatorname{ad}x)]\subset L_{a+b}(\operatorname{ad}x)$. 特别是，$L_0(\operatorname{ad}x)$ 是 $L$ 的一个子代数，且当 char F=0, $a\neq 0$ 时，$L_a(\operatorname{ad}x)$ 的每一个元素都是 ad-幂零的.

证　以下的公式是引理 4.2B 的证明中所注明的公式的特殊情况:

$$(\operatorname{ad}x-a-b)^m[yz]=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}[(\operatorname{ad}x-a)^i(y),\ (\operatorname{ad}x-b)^{m-i}(z)].$$

从而当 $y\in L_a(\operatorname{ad}x)$，$z\in L_b(\operatorname{ad}x)$ 时，对充分大的 $m$，右边的各项都是 0. ▮

## 15.2. Engel 子代数

按照引理 15.1，对于 $x\in L$，$L_0(\operatorname{ad}x)$ 是 $L$ 的子代数. (根据 D. W. Barnes 的说法，我们称它为 **Engel 子代数**. 以下两个引理对于 Cartan 子代数的讨论，可以说是基本的.

引理 A　设 $K$ 是 $L$ 的子代数. 选取 $z\in K$，使得 $L_0(\operatorname{ad}z)$ 是在所有的 $L_0(\operatorname{ad}x)(x\in K)$ 中为极小的. 假定 $K\subset L_0(\operatorname{ad}z)$，则 $L_0(\operatorname{ad}z)\subset L_0(\operatorname{ad}x)$ 对所有 $x\in K$ 成立.

证　开始时取定一个任意的 $x\in K$，考虑 $L$ 的自同态的族

$\{\text{ad}(z+cx)\,|\,c\in\text{F}\}$. 因为 $K_0=L_0(\text{ad}\,z)$ 是包含 $K$ 的 $L$ 的子代数，故这些自同态使 $K_0$ 不变，从而诱导出商向量空间 $L/K_0$ 的自同态．如果 $T$ 是不定元，我们就能把 $\text{ad}(z+cx)$ 的特征多项式表示成它在 $K_0$ 和 $L/K_0$ 上的特征多项式的乘积 $f(T,c)g(T,c)$．若 $r=\dim K_0$, $n=\dim L$, 我们可写为 $f(T,c)=T^r+f_1(c)T^{r-1}+\cdots+f_r(c)$, $g(T,c)=T^{n-r}+g_1(c)T^{n-r-1}+\cdots+g_{n-r}(c)$. 读者可看到(将它翻译成矩阵语言后)系数 $f_i(c)$, $g_i(c)$ 都是 $c$ 的至多为 $i$ 次的多项式.

根据定义，$\text{ad}\,z$ 的特征值 0 只出现在子空间 $K_0$ 上，这意味着(对 $c=0$ 的特殊情况) $g_{n-r}$ 在 F 上不是恒等于 0 的．所以我们可找到任意多个纯量，它们都不是 $g_{n-r}$ 的零点，譬如说，$c_1,\cdots,c_{r+1}$ 就是 $r+1$ 个这样的不同纯量．这里说 $g_{n-r}(c)\neq 0$，也就等于说：0 不是 $\text{ad}(z+cx)$ 在商空间上的特征值，这就迫使 $L_0(\text{ad}(z+cx))$ 整个地落在子空间 $K_0$ 之内．但后者是选择得极小的，所以对于 $1\leqslant i\leqslant r+1$ 可得 $L_0(\text{ad}\,z)=L_0(\text{ad}(z+c_ix))$．这也就意味着 $\text{ad}(z+c_ix)$ 在 $L_0(\text{ad}\,z)$ 上仅有特征值 0，即 $f(T,c_i)=T^r$．所以每一个多项式 $f_1,\cdots,f_r$（次数至多为 $r$）有 $r+1$ 个不同的零点 $c_1,\cdots,c_{r+1}$，迫使这些多项式都恒等于 0.

刚才我们已证明 $L_0(\text{ad}(z+cx))\supset K_0$ 对所有的 $c\in\text{F}$ 都成立．因为 $x$ 是任意的，我们可把它换成 $x-z$，取 $c=1$，得到 $L_0(\text{ad}\,x)\supset L_0(\text{ad}\,z)$. ∎

**引理 B** 如果 $K$ 是 $L$ 的子代数，它包含一个 Engel 子代数，则 $N_L(K)=K$．特别是，Engel 子代数是自正规的.

**证** 假定 $K\supset L_0(\text{ad}\,x)$．则 $\text{ad}\,x$ 作用在 $N_L(K)/K$ 上没有特征值 0．另一方面，$x\in K$ 意味着 $[N_L(K),x]\subset K$，所以 $\text{ad}\,x$ 作用在 $N_L(K)/K$ 上是平凡的．合起来，就迫使 $K=N_L(K)$. ∎

## 15.3. Cartan 子代数

李代数 $L$ 的 **Carten** 子代数(简称CSA)是一个幂零子代数，它与它在 $L$ 内的正规化子相等．这一定义有一个缺点，就是它并

不意味着 CSA 的存在（确实，在有限域上的存在性问题尚未完全解决）．如果 $L$ 是半单纯的($\operatorname{char} F=0$)，则极大环面子代数 $H$ 是 Abel 的(从而幂零)，而且 $N_L(H)=H$；这是因为 $L=H+\coprod_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$，$[HL_\alpha]=L_\alpha$ ($\alpha\in\Phi$)．所以此时 CSA 肯定存在(而且起着重要的作用)．更一般地，有下述定理：

**定理** 设 $H$ 是李代数 $L$ 的子代数．则 $H$ 是 $L$ 的 CSA 当且仅当 $H$ 是极小 Engel 子代数（说明了 CSA 的存在性）．

**证** 首先假设 $H=L_0(\operatorname{ad} z)$是 $L$ 的一个 Engel 子代数，根据(15.2)的引理 B，$H$ 是自正规的．如果 $H$ 不真正包含其它 Engel 子代数，则(15.2)引理 A 的假设被满足（取 $H=K$），迫使 $H=L_0(\operatorname{ad} z)\subset L_0(\operatorname{ad} x)$对所有 $x\in H$ 都成立．尤其是对 $x\in H$，$\operatorname{ad}_H x$ 是幂零的，所以(由 Engel 定理) $H$ 是幂零的．

反之，设 $H$ 是 $L$ 的 CSA．因为 $H$ 是幂零的，故对所有的 $x\in H$，有 $H\subset L_0(\operatorname{ad} x)$．我们希望至少对于一个 $x$ 能有等式成立．否则，假设等式永不能成立．这时，取 $L_0(\operatorname{ad} z)$ ($z\in H$)尽可能小．再一次应用(15.2)的引理 A，我们得到 $L_0(\operatorname{ad} x)\supset L_0(\operatorname{ad} z)$ 对所有的 $x\in H$ 成立．这意味着在非零向量空间 $L_0(\operatorname{ad} z)/H$ 诱导出来的 $H$ 的表示中，每一个 $x\in H$ 的作用相当于一个幂零自同态．由(3.3)可知，$H$ 使某一非零的 $y+H$ 变成 0，或换句话说，存在 $y\notin H$，使$[Hy]\subset H$．这与 $H$ 是自正规化的假设相矛盾．∎

**推论** 设 $L$ 是半单纯的($\operatorname{char} F=0$)，则 $L$ 的 CSA 恰好是 $L$ 的极大环面子代数．

**证** 在定理的前面我们已说过：任一极大环面子代数是一个 CSA．反之，设 $H$ 是一个 CSA．注意到如果 $x=x_s+x_n$ 是 $x$ 在 $L$ 内的约当分解，则 $L_0(\operatorname{ad} x_s)\subset L_0(\operatorname{ad} x)$：任一被 $\operatorname{ad} x_s$ 的幂变到 0 的 $y$ 也被 $\operatorname{ad} x$ 的幂变为 0，这是因为 $\operatorname{ad} x_n$ 是幂零的，且与 $\operatorname{ad} x_s$ 可交换．又注意到对半单纯的 $x\in L$，由于 $\operatorname{ad} x$ 是可对角化的，故 $L_0(\operatorname{ad} x)=C_L(x)$．现在 CSA $H$ 是极小 Engel 子代数，其形如 $L_0(\operatorname{ad} x)$（按上述定理）．由以上论述，加上极小性，则迫使 $H=L_0(\operatorname{ad} x_s)=C_L(x_s)$．但 $C_L(x_s)$ 显然包含有 $L$ 的一个极大环面子

代数，它是一个 CSA，从而也是一个极小 Engel 子代数. 由此可断定 $H$ 是一个极大环面子代数.

作为这个证明的推论，我们注意到：半单纯李代数(char F=0)的一个极大环面子代数具有形式 $C_L(s)$（这里 $s$ 是某一半单纯元素 $s$）（见练习 8.7）. 这样的一个元素 $s$ 被称为正则半单纯的.

## 15.4. 函子性质

**引理 A** 设 $\phi: L \to L'$ 是李代数的满同态. 若 $H$ 是 $L$ 的 CSA，则 $\phi(H)$ 是 $L'$ 的 CSA.

**证** 显然 $\phi(H)$ 是幂零的. 设 $A = \mathrm{Ker}\,\phi$，且将 $L'$ 与 $L/A$ 等同看待. 若 $x+A$ 正规化 $H+A$，则 $x \in N_L(H+A)$. 但 $H+A$ 包含一个 CSA（由定理 15.3，它是极小 Engel 子代数），所以子代数 $H+A$ 是自正规的（(15.2)的引理 B）. 因此 $x \in H+A$，即 $\phi(H)$ 是自正规的. ▌

**引理 B** 设 $\phi: L \to L'$ 是李代数的满同态. 设 $H'$ 是 $L'$ 的 CSA，$K = \phi^{-1}(H')$. 则 $K$ 的任一 CSA $H$ 也是 $L$ 的 CSA.

**证** 由假设，$H$ 是幂零的. 根据上面的引理，$\phi(H)$ 是 $\phi(K) = H'$ 的 CSA，迫使 $\phi(H) = H'$（因为 CSA 是极小 Engel 的）. 若 $x \in L$ 正规化 $H$，则 $\phi(x)$ 正规化 $\phi(H)$，所以 $\phi(x) \in \phi(H)$，或 $x \in H + \mathrm{Ker}\,\phi$. 但 $\mathrm{Ker}\,\phi \subset K$（根据构造），故 $x \in H+K \subset K$. 现在因 $H$ 是 $K$ 的 CSA，所以 $x \in N_K(H) = H$. ▌

### 练　习

1. $\mathfrak{sl}(n, \mathsf{F})$ 的半单纯元素为正则的，当且仅当它的特征值各不相同（即：当且仅当它的最小多项式与特征多项式相同）.

2. 设 $L$ 是半单纯的(char F=0). 从练习 8.7 推导出 $L$ 的仅有的可解 Engel 子代数是 CSA.

3. 设 $L$ 是半单纯的(char F=0)，$x \in L$ 半单纯. 证明：$x$ 是正则的当且仅当 $x$ 恰好落在一个 CSA 内。

4. 设 $H$ 是李代数 $L$ 的 CSA. 证明 $H$ 是极大幂零的，即它不真包含于 $L$ 的任一幂零子代数内. 说明反之不对.

5. 如果仅要求域 F 的基数超过 $\dim L$，说明如何证明(15.2)的引理 A.

6. 设 $L$ 是半单纯的($\operatorname{char} F=0$)，$L'$ 是它的半单纯子代数. 证明 $L'$ 的每个 CSA 都落在 $L$ 的某个 CSA 之内. [参看练习 6.9.]

【附注】

这里使用的处理 Cartan 子代数的方法大部分是属于 Barnes[1] 的，他引入了 Engel 子代数的概念. 也参见 Winter[1].

## 16. 共轭定理

在本节内，假设 $F$ 是特征数 0 的代数闭域. 我们将证明在 F 上任意李代数 $L$ 内，所有的 CSA 在内自同构群 $\operatorname{Int} L$ (即由所有 $\exp \operatorname{ad} x$ 所生成的群，其中 $x \in L$ 为 ad 幂零的)下共轭. 当 $L$ 为半单纯时，这意味着所有的极大环面子代数是共轭的，所以 $L$ 由它关于任一极大环面子代数的根系所唯一确定(可以差一个同构). 作为一个辅助步骤，我们也将证明 $L$ 的所有极大可解子代数是共轭的.

### 16.1. 群 $\mathscr{E}(L)$

设 $L$ 是李代数. 如果存在 $y \in L$ 以及 $\operatorname{ad} y$ 的某一非零特征值 $a$，使得 $x \in L_a(\operatorname{ad} y)$，则称 $x \in L$ 为强 ad-幂零的. 这就迫使 $x$ 是 ad-幂零的(15.1)，所以这一术语是合理的. 用 $\mathscr{N}(L)$ 表示 $L$ 的所有强 ad-幂零元素的集合，且用 $\mathscr{E}(L)$ 表示由所有 $\exp \operatorname{ad} x$ ($x \in \mathscr{N}(L)$)所生成的 $\operatorname{Int} L$ 的子群. (注意：$\mathscr{N}(L)$ 在 $\operatorname{Aut} L$ 下不变，所以 $\mathscr{E}(L)$ 在 $\operatorname{Aut} L$ 内正规.)

我们宁愿使用 $\mathscr{E}(L)$ 而不愿使用 $\operatorname{Int} L$ 的所有元素，这是因为 $\mathscr{E}(L)$ 具有更好的函子性质. (实际上当 $L$ 为半单纯时，以后的事实将会说明有 $\mathscr{E}(L)=\operatorname{Int} L$ 成立；参看(16.5).)例如，若 $K$ 是 $L$ 的子代数，则显然 $\mathscr{N}(K) \subset \mathscr{N}(L)$. 这就可定义由所有 $\exp \operatorname{ad}_L x$ ($x \in \mathscr{N}(K)$)生成的 $\mathscr{E}(L)$ 的子群 $\mathscr{E}(L; K)$. 然后只要把 $\mathscr{E}(L; K)$ 限制于 $K$，就可得到 $\mathscr{E}(K)$. 与此对比，如果取任意 $x \in K$ 使 $\operatorname{ad}_K x$ 为幂零，则对 $\operatorname{ad}_L x$ 并无控制，所以在 $\operatorname{Int} K$ 与

Int $L$ 之间没有这样的直接联系.

很清楚，如果 $\phi: L \to L'$ 是满同态，且 $y \in L$，则 $\phi(L_0(\mathrm{ad}\, y)) = L'_0(\mathrm{ad}\phi(y))$. 由此可得：$\phi(\mathscr{N}(L)) = \mathscr{N}(L')$.

**引理** 设 $\phi: L \to L'$ 是满同态. 若 $\sigma' \in \mathscr{E}(L')$，则存在 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\phi} & L' \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma' \\ L & \xrightarrow[\phi]{} & L' \end{array}$$

**证** 只要对 $\sigma' = \exp \mathrm{ad}_{L'} x'$，$x' \in \mathscr{N}(L')$ 的情形证明即可. 由引理前面的一段陈述可知：至少有一个 $x \in \mathscr{N}(L)$，使得 $x' = \phi(x)$. 对于任意的 $z \in L$，有

$$\begin{aligned}(\phi \circ \exp \mathrm{ad}_L x)(z) &= \phi(z + [xz] + (1/2)[x[xz]] + \cdots) \\ &= \phi(z) + [x'\phi(z)] + (1/2)[x'[x'\phi(z)]] + \cdots) \\ &= (\exp \mathrm{ad}_{L'} x' \circ \phi)(z).\end{aligned}$$

换句话说，图形是可交换的. ∎

## 16.2. CSA 的共轭性(可解情形)

**定理** 设 $L$ 可解，$\mathscr{E}(L)$ 同(16.1)中的一样. 则 $L$ 的任两个 CSA $H_1, H_2$ 在 $\mathscr{E}(L)$ 下共轭.

**证** 对 $\dim L$ 使用归纳法. $\dim L = 1$ (或 $L$ 幂零)的情形是显易的. 假设 $L$ 不是幂零的，因为 $L$ 可解，$L$ 具有非零 Abel 理想(例如，导出列的最后一个非零项)，从中选取维数最小的 $A$，置 $L' = L/A$，且用 $x \mapsto x'$ 表示典范映射 $\phi$: $L \to L/A$. 按照(15.4)的引理 $A$，$H'_1$ 和 $H'_2$ 是(可解)代数 $L'$ 的 CSA. 根据归纳假设，存在 $\sigma' \in \mathscr{E}(L')$ 把 $H'_1$ 映到 $H'_2$ 上. 由引理 16.1，我们可找到 $\sigma \in \mathscr{E}(L)$ 使图形能交换. 这意味着 $\sigma$ 把完全映象 $K_1 = \phi^{-1}(H'_1)$ 映到 $K_2 = \phi^{-1}(H'_2)$ 上. 但现在 $H_2$ 和 $\sigma(H_1)$ 都是代数 $K_2$ 的 CSA. 如果 $K_2$ 比 $L$ 小，则归纳假设允许我们找出 $\tau' \in \mathscr{E}(K_2)$ 使 $\tau'\sigma(H_1) = H_2$. 但 $\mathscr{E}(K_2)$ 由 $\mathscr{E}(L; K_2) \subset \mathscr{E}(L)$ 的元素限制于 $K_2$ 上组成，

也就是说对某个 $\tau\in\mathscr{E}(L)$，有 $\tau\sigma(H_1)=H_2$，而 $\tau$ 在 $K_2$ 上的限制就是 $\tau'$，从而证得所需结果。

否则，必须有 $L=K_2=\sigma(K_1)$，所以事实上 $K_1=K_2$，$L=H_2+A=H_1+A$。为了决定这一情况，我们必须明显地构造出 $L$ 的一个自同构（在整个论证中仅在此处才必须这样做！）。由定理15.3，对于适当的 $x\in L$，CSA $H_2$ 是形如 $L_0(\mathrm{ad}\,x)$ 的，而 $A$ 是 $\mathrm{ad}\,x$ 不变。$A=A_0(\mathrm{ad}\,x)\oplus A_*(\mathrm{ad}\,x)$（见(15.1)），并且每一个加项在 $L=H_2+A$ 之下不变。由 $A$ 的极小性，或者有 $A=A_0(\mathrm{ad}\,x)$，或者有 $A=A_*(\mathrm{ad}\,x)$。第一种情形是荒谬的，因为这将迫使 $A\subset H_2$，$L=H_2$，这与 $L$ 不是幂零的相矛盾。所以 $A=A_*(\mathrm{ad}\,x)$。显然 $A=L_*(\mathrm{ad}\,x)$。

由于 $L=H_1+A$，在此可写 $x=y+z$，这里 $y\in H_1$，$z\in L_*(\mathrm{ad}\,x)$。然后使用 $\mathrm{ad}\,x$ 在 $L_*(\mathrm{ad}\,x)$ 上是可逆的这一事实，记 $z=[xz']$，$z'\in L_*(\mathrm{ad}\,x)$。因为 $A$ 是 Abel 的，$(\mathrm{ad}\,z')^2=0$，所以 $\exp\mathrm{ad}\,z'=1_L+\mathrm{ad}\,z'$ 作用于 $x$，即得 $x-z=y$。尤其，$H=L_0(\mathrm{ad}\,y)$ 必须也是 $L$ 的 CSA。因为 $y\in H_1$，$H\supset H_1$，因而 $H=H_1$（都是极小 Engel 的）。所以 $H_1$ 通过 $\exp\mathrm{ad}\,z'$ 共轭于 $H_2$。

剩下的是证实 $\exp\mathrm{ad}\,z'$ 确实在 $\mathscr{E}(L)$ 内：$z'$ 可写成 $A=L_*(\mathrm{ad}\,x)$ 的某些强 ad-幂零元素 $z_i$ 之和，而后者是可交换的（$A$ 是 Abel 的），所以 $\exp\mathrm{ad}\,z'=\prod_i\exp\mathrm{ad}\,z_i\in\mathscr{E}(L)$。▌

## 16.3. Borel 子代数

为了从可解情形转移到一般情形，我们利用李代数 $L$ 的 Borel 子代数，它定义为 $L$ 的极大可解子代数。如果我们能证明 $L$ 的任两个 Borel 子代数在 $\mathscr{E}(L)$ 下共轭，则从定理 16.2，可得 $L$ 的所有 CSA 共轭。

**引理 A** 若 $B$ 是 $L$ 的 Borel 子代数，则 $B=N_L(B)$。

**证** 设 $x$ 正规化 $B$，则 $B+\mathsf{F}x$ 是 $L$ 的子代数。因为 $[B+\mathsf{F}x, B+\mathsf{F}x]\subset B$，故它又是可解的。因而由 $B$ 的极大性可知 $x\in B$。▌

**引理 B** 若 $\mathrm{Rad}\,L\neq L$，则 $L$ 的 Borel 子代数与半单纯李代数

$L/\text{Rad}\,L$ 的 Borel 子代数成自然的一一对应.

证 $\text{Rad}\,L$ 是 $L$ 的可解理想,故对 $L$ 的任一 Borel 子代数 $B$, $B+\text{Rad}\,L$ 是 $L$ 的可解子代数,即 $\text{Rad}\,L\subset B$(由极大性).引理立即得证. ▮

从引理 B 可知,最基本的是当 $L$ 为半单纯的情形.此时设 $H$ 是一个 CSA; $\Phi$ 是 $L$ 关于 $H$ 的根系.固定一个基 $\Delta$ 以及与它相关联的正根集合.置 $B(\Delta)=H+\coprod_{\alpha\succ 0}L_\alpha$, $N(\Delta)=\coprod_{\alpha\succ 0}L_\alpha$.此时我们知道 $B(\Delta)$ 是 $L$ 的子代数,具有导代数 $N(\Delta)$.此外 $N(\Delta)$ 是幂零的:因为若 $x\in L_\alpha(\alpha\succ 0)$,则 $\text{ad}\,x$ 作用于具有(关于 $\Delta$ 的)正高度的根的根向量上,使得高度至少增加 1;这说明了如何会使降中心列趋于 0.现在可知 $B(\Delta)$ 是可解的.事实上,我们可断言: $B(\Delta)$ 是一个 Borel 子代数:设 $K$ 是 $L$ 的任一子代数,它真包含 $B(\Delta)$.则因 $K$ 在 $\text{ad}\,H$ 下不变,它必须包含某一 $L_\alpha$(对于 $\alpha\prec 0$).但这迫使 $K$ 包含一个单纯代数 $S_\alpha$,于是 $K$ 不能是可解的.

引理 C 设 $L$ 半单纯,具有 CSA $H$ 和根系 $\Phi$.对每一个基 $\Delta\subset\Phi$, $B(\Delta)$ 是 $L$ 的 Borel 子代数(称为关于 $H$ 的**标准 Borel 子代数**). $L$ 的关于 $H$ 的所有标准 Borel 子代数在 $\mathscr{E}(L)$ 下共轭.

证 只有第二句陈述需要证明.回忆(14.3),作用在 $H$ 上的反射 $\sigma_\alpha$ 可以扩张为 $L$ 的内自同构 $\tau_\alpha$,它在 $\mathscr{E}(L)$ 内(由它的构造可知).这一自同构把 $B(\Delta)$ 映为 $B(\sigma_\alpha\Delta)$ 是显然的.利用 Weyl 群是由反射生成并且可迁地作用在基上这一事实,可以看到 $\mathscr{E}(L)$ 可迁地作用在关于 $H$ 的标准 Borel 子代数上. ▮

## 16.4. Borel 子代数的共轭性

**定理** 任意李代数 $L$ 的 Borel 子代数都在 $\mathscr{E}(L)$ 下共轭.

**推论** 任意李代数 $L$ 的 Cartan 子代数都在 $\mathscr{E}(L)$ 下共轭.

**推论的证明** 设 $H$, $H'$ 是 $L$ 的两个 CSA.因为它们是幂零的(从而可解),所以它们每一个都至少位于一个 Borel 子代数之中,譬如说 $B$ 和 $B'$ 之中.根据定理,存在 $\sigma\in\mathscr{E}(L)$ 使得 $\sigma(B)=B'$.现在 $\sigma(H)$ 和 $H'$ 都是可解子代数 $B'$ 的 CSA,所以由定理

16.2，存在$\tau'\in\mathscr{E}(B')$，使$\tau'\sigma(H)=H'$．但$\tau'$是某一个$\tau\in\mathscr{E}(L;B')\subset\mathscr{E}(L)$对$B'$的限制(16.1)，所以有$\tau\sigma(H)=H'$，$\tau\sigma\in\mathscr{E}(L)$．▮

**定理的证明** 我们对$\dim L$应用归纳法．$\dim L=1$的情形是平凡的．根据引理16.1和16.3B以及归纳假设，我们可以假定$L$是半单纯的．取定一个标准Borel子代数$B$(关于某个CSA)．只要证明任一其它的Borel子代数$B'$在$\mathscr{E}(L)$下共轭于$B$．若$B\cap B'=B$，则没有什么要证的(因为由极大性迫使$B'=B$)．所以我们又可对$\dim(B\cap B')$施行第二个(下降的)归纳法．根据归纳法假设，任一Borel子代数若它与$B$(或$B$的共轭)的交集具有更大的维数，则它已经与$B$共轭．

(1) 首先假设$B\cap B'\neq 0$．有两种情况：

情况(i)：$B\cap B'$的幂零元集合$N'$是非零的．由于$B$是标准的，$N'$是子空间，且$B\cap B'$的导代数由幂零元组成，这意味着$N'$是$B\cap B'$内的一个理想．$N'$当然不是$L$的理想，所以它的正规化子$K$是$L$的真子代数．

下面我们证明$B\cap B'$真正包含于$B\cap K$和$B'\cap K$内．因为当考虑由ad所诱导的$N'$在$B/(B\cap B')$上的作用时，每个$x\in N'$在这一向量空间上的作用是幂零的，故由定理3.3，必定存在一个非零的$y+(B\cap B')$，它被所有的$x\in N'$零化，即使得$[xy]\in B\cap B'$，$y\notin B\cap B'$．但$[xy]$也在$[BB]$内，从而是幂零的，这就迫使$[xy]\in N'$，或$y\in N_B(N')=B\cap K$，且$y\notin B\cap B'$．类似地，$B\cap B'$真正包含于$B'\cap K$内．

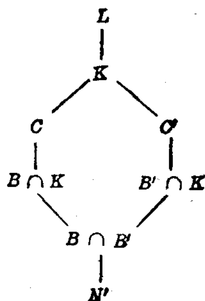


图 1

另一方面，$B\cap K$和$B'\cap K$是$K$的可解子代数．设$C$，$C'$分别是包含它们的$K$的Borel子代数(图1)．因为$K\neq L$，由归纳假设，可找到$\sigma\in\mathscr{E}(L;K)\subset\mathscr{E}(L)$使得$\sigma(C')=C$．由于$B\cap B'$是$C$和$C'$的真(非零)子代数，故由第二

个归纳法假设，就能得到$\tau\in\mathscr{E}(L)$使得$\tau\sigma(C')\subset B$(即$\tau$把包含$\sigma(C')=C$的$L$的Borel子代数映到$B$上). 最后，$B\cap\tau\sigma(B')\supset\tau\sigma(C')\cap\tau\sigma(B')\supset\tau\sigma(B'\cap K)\supsetneqq\tau\sigma(B\cap B')$，所以前者比$B\cap B'$有更大的维数. 再一次应用第二个归纳假设，可看到$B$在$\mathscr{E}(L)$下共轭于$\tau\sigma(B')$. 由此我们已解决了情况(i).

情况(ii)：$B\cap B'$没有非零幂零元. 由于命题4.2(c)和引理16.3A, $L$的任一Borel子代数包含它的元素的半单纯部分与幂零部分. 这就说明了$B\cap B'=T$是一个环面子代数. 现在我们利用$B$是标准Borel子代数这一事实，说明$B=B(\Delta)$, $N=N(\Delta)$, $B=H+N$. 因为$[BB]=N$, 且因$T\cap N=0$, 显然$N_B(T)=C_B(T)$. 设$C$是$C_B(T)$的任一CSA, 因此$C$是幂零的，且$T\subset N_{C_B(T)}(C)=C$. 若$n\in N_B(C)$, $t\in T\subset C$, 则对某一$k$有$(\mathrm{ad}\,t)^k n=0$, 这是因为$C$是幂零的. 但$\mathrm{ad}\,t$是半单纯的，故$k=1$且$n\in C_B(T)$. 于是$N_B(C)=N_{C_B(T)}(C)=C$. 作为$B$的幂零自正规子代数，$C$是$B$的CSA(包含$T$). 利用定理16.2, 我们知道$C$是$L$的极大环面子代数，它在$\mathscr{E}(B)$下(从而在$\mathscr{E}(L)$下)共轭于$H$. 所以不失一般性，可假设$T\subset H$.

假设$T=H$. 显然$B'\supsetneqq H$, 所以$B'$必须至少包含一个$L_\alpha$($\alpha\prec 0$关于$\Delta$). 应用$\tau_\alpha$(见16.3引理C)于$B'$就可得到一个Borel子代数$B''$，它与$B$的交集包含$H+L_{-\alpha}$, 从而由第二个归纳法假设可知：$B''$与$B$共轭，由此得证.

接着再假设$T$真包含于$H$内. 在此或者有$B'$中心化$T$, 或者不是这样. 如果$B'\subset C_L(T)$, 我们求助于第一个归纳法假设，因为$\dim C_L(T)<\dim L$ ($T\neq 0$且$Z(L)=0$). 也就是说利用$H\subset C_L(T)$这一事实，找出$C_L(T)$的包含$H$的Borel子代数$B''$，然后用归纳法假设找出$\sigma\in\mathscr{E}(L;C_L(T))\subset\mathscr{E}(L)$, 它把$B'$映到$B''$上. 特别地，$B''$是$L$的包含$H$的Borel子代数，由于第二个归纳法假设，它在$\mathscr{E}(L)$下共轭于$B$.

剩下的情况是$B'\not\subset C_L(T)$. 这可找到$\mathrm{ad}\,T$的一个公共特征向量$x\in B'$以及一个元素$t\in T$, 使$[tx]=ax$, 其中$a$是正有理数.

定义 $S=H+\coprod L_\alpha$，其中 $\alpha\in\Phi$ 取遍使 $\alpha(t)$ 为正有理数的那些根。显然 $S$ 是 $L$ 的一个子代数(且 $x\in S$)。此外，立即可知 $S$ 是可解的(见引理16.30的证明)。设 $B''$ 是 $L$ 的包含 $S$ 的 Borel 子代数。现在 $B''\cap B'\supset T+\mathrm{F}x\supsetneqq T=B'\cap B$，所以 $\dim B''\cap B'>\dim B\cap B'$。类似地，$B''\cap B\supset H\supsetneqq T$，所以 $\dim B''\cap B>\dim B'\cap B$。把第二个归纳假设用于后一个不等式，即证得 $B''$ 与 $B$ 共轭。(特别要指出的是，$B''$ 显然关于共轭于 $H$ 的一个 CSA 是标准的.)接着再把第二个归纳假设应用于第一个不等式(因为 $B''$ 是标准的)，可证 $B''$ 共轭于 $B'$。所以 $B$ 共轭于 $B'$。

(2) 前面已处理了所有 $B\cap B'\neq 0$ 的情况。现在考虑若 $B\cap B'=0$ 时将怎样。这时迫使 $\dim L\geqslant\dim B+\dim B'$。由于 $B$ 是标准的，我们知道 $\dim B>(1/2)\dim L$，所以 $B'$ 必定是"太小"的。更精确地说，取 $T$ 为 $B'$ 的极大环面子代数。若 $T=0$，则 $B'$ 由幂零元所组成，从而 $B'$ 是幂零的(Engel 定理)而且是自正规的((16.3)的引理A)，即 $B'$ 是一个 CSA。这是荒谬的。因为我们知道(推论15.3)，$L$ 的所有 CSA 是环面的，因而 $T\neq 0$。如果 $H_0$ 是 $L$ 中包含 $T$ 的极大环面子代数，则 $B'$ 与关于 $H_0$ 的任一标准 Borel 子代数 $B''$ 有一个非零交集。因而由证明的第一部分可得 $B'$ 共轭于 $B''$，所以 $\dim B'=\dim B''>(1/2)\dim L$，这与 $B'$ 的"小"相矛盾。∎

推论16.4容许我们给 F 上的一个任意李代数 $L$ 加上一个数值不变量(称为秩)，即 $L$ 的一个 CSA 的维数。当 $L$ 为半单纯时，$L$ 的秩与 $\Phi$ 的秩相同，$\Phi$ 是 $L$ 关于任一个极大环面子代数(=CSA)的根系。

关于 Borel 子代数共轭定理的一个附带结果是值得注意的。设 $L$ 为半单纯，具有 CSA $H$ 及根系 $\Phi$。我们断定：$L$ 内包含 $H$ 的任一 Borel 子代数 $B$ 都是标准的。事实上，设 $\sigma(B(\Delta))=B$，其中 $\Delta$ 是 $\Phi$ 的某一给定的基，$\sigma\in\mathscr{E}(L)$。由于 $H$ 和 $\sigma(H)$ 是 $B$ 的二个 CSA，它们在 $\mathscr{E}(L;B)\subset\mathscr{E}(L)$ 下是共轭的(定理16.2)，所以也可假设 $\sigma(H)=H$。此时显然对每一 $\alpha\succ 0$，有 $\sigma(L_\alpha)=L_{\sigma\alpha}$，$\sigma\alpha$ 是一

个根. 此外，由于$\sigma$而产生的根的置换仍保持和式，所以$\sigma(\Delta)=\Delta'$仍是$\Phi$的一个基，且$B=B(\Delta')$是标准的.

## 16.5. 自同构群

设$L$是半单纯的，$H$是$L$的CSA，带有根系$\Phi$以及某一固定的基$\Delta$. 如果$\tau$是$L$的任一自同构，则当然$\tau(B)$，$B=B(\Delta)$，是$L$的另一个Borel子代数，所以它被某一$\sigma_1\in\mathscr{E}(L)$变回到$B$（定理16.4）. 现在$H$和$\sigma_1\tau(H)$是$L$的两个CSA（从而也是$B$的CSA），因而由定理16.2，可找到$\sigma_2\in\mathscr{E}(L; B)\subset\mathscr{E}(L)$，它把$\sigma_1\tau(H)$变成$H$（且使$B$不变）. 由于$\sigma_2\sigma_1\tau$同时保持$H$和$B$，它诱导了$\Phi$的一个自同构，且使$\Delta$不变. 据(12.2)我们已知道所有这样的自同构：非平凡的自同构来自非平凡的图自同构；对于不可约的$\Phi$，它们仅在$A_l(l>1)$，$D_l$，$E_6$的情况下才存在. 设$\rho$是$L$的相应自同构（见练习14.6），因为$\rho$不是完全唯一的，故可调整所涉及到的纯量，使得$\rho\sigma_2\sigma_1\tau$把$x_\alpha$变成$c_\alpha x_\alpha(\alpha\succ 0)$，把$y_\alpha$变成$c_\alpha^{-1}y_\alpha$，从而$h_\alpha$变成$h_\alpha$（因而所有的$h$都变成自己）. 结论是：$\tau$与群$\mathscr{E}(L)\cdot\Gamma(L)$（$\Gamma(L)=L$的图自同构群）的一个元素只差一个对角自同构，即一个自同构作用在$H$上是恒等的，且作用在每个根空间$L_\alpha$上是纯量乘法.

可以证明（见Jacobson[1]，278页），一个对角自同构总是内自同构，事实上它的构造说明了它可在$\mathscr{E}(L)$内被找到. 此外，可证乘积$\mathrm{Aut}\,L=\mathrm{Int}(L)\cdot\Gamma(L)$是半直积（Jacobson[1]，第九章练习）. 因而更有$\mathscr{E}(L)=\mathrm{Int}(L)$. 读者也可在Jacobson的书里找到关于各个单纯李代数的自同构群的详细描述.

### 练　　习

1. 证明$\mathscr{E}(L)$是1阶群当且仅当$L$是幂零的.

2. 设$L$是半单纯的，$H$是CSA，$\Delta$是$\Phi$的基. 证明$L$内由幂零元组成的任一（关于此性质的）极大子代数在$\mathscr{E}(L)$下共轭于$B(\Delta)$的导代数$N(\Delta)$.

3. 设 $\Psi$ 是根的一个集合，它是闭的(即 $\alpha, \beta\in\Psi$, $\alpha+\beta\in\Phi$ 时可得 $\alpha+\beta\in\Psi$)且满足 $\Psi\cap-\Psi=\phi$. 证明 $\Psi$ 被包含在关于 $\Phi$ 的某一基的正根集合内. [利用练习 2.](这一练习属于根系的理论，但利用李代数做更容易一些.)

4. 当 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$时，定理 16.4 的证明可怎样简化?

5. 设 $L$ 半单纯. 若 $L$ 的一个半单纯元素是正则的，则它仅位于有限多个 Borel 子代数内. (其逆命题也正确，但更难证明，而且它还启示了关于 $L$ 中不一定半单纯的元素的"正则"概念.)

6. 设 $L$ 是半单纯的, $L=H+\coprod L_\alpha$. 如果 $L$ 的子代数 $P$ 包含某一 Borel 子代数,则称 $P$ 为**抛物子代数**. (根据引理 15.2B,此时 $P$ 是自正规的.)固定一个基 $\Delta\subset\Phi$ 且置 $B=B(\Delta)$. 对于每个子集 $\Delta'\subset\Delta$, 定义 $P(\Delta')$ 为由所有的 $L_\alpha$($\alpha\in\Delta$ 或 $-\alpha\in\Delta'$)以及 $H$ 所生成的 $L$ 的子代数.

(a) $P(\Delta')$ 是 $L$ 的抛物子代数 (称它为关于 $\Delta$ 的标准抛物子代数).

(b) $L$ 的每一个包含 $B(\Delta)$的抛物子代数都具有形式 $P(\Delta')$(对于某个 $\Delta'\subset\Delta$). [使用引理 10.2A 的推论以及命题 8.4(d).]

(c) 证明 $L$ 的每一抛物子代数在 $\mathscr{E}(L)$ 下共轭于 $P(\Delta')$ 中的一个.

7. 设 $L=\mathfrak{sl}(2,\mathsf{F})$,具有标准基$(x, h, y)$.对 $c\in\mathsf{F}$,记 $x(c)=\exp\operatorname{ad}(cx)$, $y(c)=\exp\operatorname{ad}(cy)$. 对 $c\neq0$, 定义内自同构 $w(c)=x(c)y(-c^{-1})x(c)$, $h(c)=w(c)w(1)^{-1}(=w(c)w(-1))$. 计算 $w(c)$, $h(c)$关于 $L$ 的已知基的矩阵,并且推导出 $L$ 的所有对角自同构(16.5)是内自同构. 在这一情形下可得出结论: $\operatorname{Aut} L=\operatorname{Int} L=\mathscr{E}(L)$.

8. 设 $L$ 为半单纯. 证明: $L$ 的两个 Borel 子代数 $B$, $B'$ 的交集总是包含 $L$ 的一个 CSA. [这一证明不太容易,以下是一种可能的途径:

(a) 设 $N$, $N'$ 分别是 $B$, $B'$ 内的幂零元的理想. 关于 $L$ 的 Killing 型, $N=B^\perp$, $N'=B'^\perp$,这里⊥表示正交余空间.

(b) 所以 $B=N^\perp=(N+(N\cap N'))^\perp=(N+(B\cap N'))^\perp=N^\perp\cap(B^\perp+N'^\perp)=B\cap(N+B')=N+(B\cap B')$.

(c) 注意 $A=B\cap B'$ 包含它的元素的半单纯部分与幂零部分.

(d) 设 $T$ 是 $A$ 的极大环面子代数，找出 $A\cap N$ 的一个 $T$-稳定的余空间$A'$. 则 $A'$ 由半单纯元素构成. 由于 $B/N$ 是 abelian 的, $[TA']=0$, 迫使 $A'=T$.

(e) 联合(b),(d)可得 $B=N+T$; 于是 $T$ 是 $L$ 的极大环面子代数.]

【附注】

定理 16.4 的证明属于 Winter[1](部分地受到 G. D. Mostow 的启示); 也可参见 Barnes[1]. 大多数较老的证明都使用解析方法(F=C)或者代数几何, 见 Bourbaki[3] 第 VII 章, Chevalley[2], Jacobson [1], Séminaire "Sophus Lie"[1], Serre[2]. 关于自同构群的详细情况, 可参考 Jacobson [1], Seligman [1].

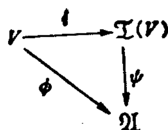
# 第五章 存在定理

## 17. 普遍包络代数

在本节内 F 可以是任意域(除非另作说明)．对于 F 上的每一个李代数 $L$，我们将联系一个带有 1 的结合代数(一般是无限维的)，它是在受 $L$ 内交换关系的条件的约束下，由 $L$ 尽可能"自由"地生成的．这一"普遍包络代数"是表示论的基本工具．虽然它可在第一章就被引入，但我们宁肯把它推迟到现在，这样可以在真正需要用到它之前，避免证明 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理这一讨厌的工作．在此建议读者暂时忘掉关于半单纯李代数的特殊理论．

### 17.1. 张量代数和对称代数

首先我们引入由普遍性质所定义的两个代数．(关于进一步的细节，可参看 S. Lang 的《代数》一书，第 16 章．)取定 F 上一个有限维的向量空间 $V$．设 $T^0V=\mathsf{F}$，$T^1V=V$，$T^2V=V\otimes V$，…，$T^mV=V\otimes\cdots\otimes V$($m$ 个)．定义 $\mathfrak{T}(V)=\coprod_{i=0}^{\infty}T^iV$，且引入一个结合乘积，它由显然的规则 $(v_1\otimes\cdots\otimes v_k)(w_1\otimes\cdots\otimes w_m)=v_1\otimes\cdots\otimes v_k\otimes w_1\otimes\cdots\otimes w_m\in T^{k+m}V$ 定义在 $\mathfrak{T}(V)$ 的齐次生成元上．这使 $\mathfrak{T}(V)$ 成为一个带 1 的结合阶化代数，它由 1 以及 $V$ 的任一基所生成．我们称它为 $V$ 上的张量代数．$\mathfrak{T}(V)$ 是 $n$ 个生成元($n=\dim V$)的、按如下意义理解的普遍结合代数：给出任一个 F 线性映射 $\phi: V\to\mathfrak{A}$($\mathfrak{A}$ 是 F 上带 1 的结合代数)，则存在唯一的 F-代数的同态 $\psi$: $\mathfrak{T}(V)\to\mathfrak{A}$，使得 $\psi(1)=1$，而且下面的图可交换($i$=包含映射)：




然后，设 $I$ 是$\mathfrak{T}(V)$内由所有 $x\otimes y-y\otimes x(x, y\in V)$生成的(双侧)理想，且称 $\mathfrak{S}(V)=\mathfrak{T}(V)/I$ 为 $V$ 上的**对称代数**. $\sigma$: $\mathfrak{T}(V)\to\mathfrak{S}(V)$是典范映射. 注意到 $I$ 的生成元在 $T^2V$ 内，显然 $I=(I\cap T^2V)\oplus(I\cap V^3V)\oplus\cdots$. 所以在 $T^0V=\mathsf{F}$, $T^1V=V$ (允许把 $V$ 等同于 $\mathfrak{S}(V)$的一个子空间)上，$\sigma$ 是内射的，而且 $\mathfrak{S}(V)$继承了 $\mathfrak{T}(V)$的分阶: $\mathfrak{S}(V)=\coprod\limits_{i=0}^{\infty}S^iV$. 关于 $I$ 作商代数的效果就正好象使 $V$ 的元素相互可交换. 所以对于从 $V$ 到带 1 的交换结合 F-代数内的线性映射来说，$\mathfrak{S}(V)$是普遍的(在前面提到的意义下). 此外，若$(x_1, \cdots, x_n)$是 $V$ 的任一固定基，则 $\mathfrak{S}(V)$是典范地同构于F上 $n$ 个变量的多项式代数，它的基是由 1 以及所有的 $x_{i(1)}\cdots x_{i(t)}(t\geqslant 1, 1\leqslant i(1)\leqslant\cdots\leqslant i(t)\leqslant n)$所组成.

读者容易验证，即使当 $V$ 是无限维的时候，上述的构造方法还是可行的.

为了后面的使用(§ 23)，在此提一下当 char F=0 时的一个特殊情况: 对称群 $\mathscr{S}_m$ 通过对张量 $v_1\otimes\cdots\otimes v_m(v_i\in V)$的下标作置换的方式作用在 $T^mV$ 上，$T^mV$ 内关于 $\mathscr{S}_m$ 不变的元素被称为 **$m$ 阶齐次对称张量**. 例: $x\otimes y+y\otimes x$(2 阶). 取定 $V$ 的一个基 $(x_1, \cdots, x_n)$，于是乘积 $x_{i(1)}\otimes\cdots\otimes x_{i(m)}(1\leqslant i(j)\leqslant n)$ 组成 $T^mV$ 的基. 对每一个有序序列 $1\leqslant i(1)\leqslant i(2)\leqslant\cdots\leqslant i(m)\leqslant n$, 定义一个对称张量:

$$\frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\mathscr{S}_m}x_{i(\pi(1))}\otimes\cdots\otimes x_{i(\pi(m))}\tag{*}$$

(由于在F内 $m!\neq 0$, 所以它是有意义的). 这些张量在 $S^mV$ 内的象是非零的，而且显然构成那里的一个基. 所以张量(*)在 $T^mV$ 内必定张成 $I\cap T^mV$ 的余空间. 另一方面，张量(*)显然张成了所

有$m$阶对称张量的空间(称它为$\tilde{S}^mV\subset T^mV$). 于是可以得出结论: $\sigma$定义了从$\tilde{S}^mV$到$S^mV$上的一个向量空间同构, 从而也是所有对称张量的空间$\tilde{\mathfrak{S}}(V)$到$\mathfrak{S}(V)$上的同构.

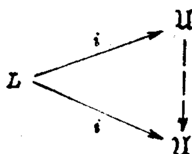
## 17.2. $\mathfrak{U}(L)$的构造

对一个任意的李代数$L$(这里容许是无限维的, 与我们惯常的约定不同), 我们从抽象的定义开始讨论. $L$的**普遍包络代数**是一个二元组$(\mathfrak{U}, i)$, 其中$\mathfrak{U}$是F上带1的结合代数, $i$: $L\to\mathfrak{U}$是一个线性映射, 对$x$, $y\in L$, 它满足:

$$i([x, y])=i(x)i(y)-i(y)i(x) \qquad (*)$$

而且还有以下的性质: 对于任意一个带1的结合F-代数$\mathfrak{A}$以及任一满足(*)的线性映射$j$: $L\to\mathfrak{A}$, 存在唯一的代数同态$\phi$: $\mathfrak{U}\to\mathfrak{A}$(把1映成1), 使得$\phi\circ i=j$.

这样的二元组$(\mathfrak{U}, i)$的唯一性是很容易证明的. 如果给出另一个二元组$(\mathfrak{B}, i')$, 满足同样的假设, 就可得到同态$\phi$: $\mathfrak{U}\to\mathfrak{B}$, $\psi$: $\mathfrak{B}\to\mathfrak{U}$. 由定义, 存在唯一的(画虚线的)映射, 使得下图可交换:




但$I_{\mathfrak{U}}$和$\psi\circ\phi$都起着这一作用, 所以$\psi\circ\phi=I_{\mathfrak{U}}$. 类似地, $\phi\circ\psi=I_{\mathfrak{B}}$.

符合条件的二元组$(\mathfrak{U}, i)$的存在性也是不难建立的. 设$\mathfrak{T}(L)$是$L$上张量代数(17.1), 且令$J$是$\mathfrak{T}(L)$内由所有的$x\otimes y-y\otimes x-[xy]$ $(x, y\in L)$生成的双侧理想. 定义$\mathfrak{U}(L)=\mathfrak{T}(L)/J$, 且令$\pi$: $\mathfrak{T}(L)\to\mathfrak{U}(L)$是典范同态. 注意到$J\subset\coprod_{i>0}T^iL$, 所以$\pi$把$T^0L=\mathrm{F}$同构地映入$\mathfrak{U}(L)$(故$\mathfrak{U}(L)$至少包含纯量). 但$\pi$把$T^1L=L$同构地映入$\mathfrak{U}(L)$却不是显而易见的, 这将在以后证明. 总之, 可以断言$(\mathfrak{U}(L), i)$是$L$的普遍包络代数, 其中$i$: $L\to\mathfrak{U}(L)$是$\pi$对$L$的限制. 实际上, 设$j$: $L\to\mathfrak{A}$如同定义中所述: 由$\mathfrak{T}(L)$

的普遍性可得一个代数同态 $\phi'$: $\mathfrak{T}(L)\to\mathfrak{A}$，它扩张了 $j$ 且将 1 映成 1. 由于 $j$ 的特殊性质(*)，迫使所有的 $x\otimes y-y\otimes x-[xy]$ 位于 $\operatorname{Ker}\phi'$ 内. 所以 $\phi'$ 诱导出一个同态 $\phi$: $\mathfrak{U}(L)\to\mathfrak{A}$，使得 $\phi\circ i=j$. $\phi$ 的唯一性是显然的，这是因为 1 和 $\operatorname{Im} i$ 一起生成了 $\mathfrak{U}(L)$.

例　设 $L$ 是 Abel 的，则理想 $J$ 由所有的 $x\otimes y-y\otimes x$ 生成，因而与(17.1)内引入的理想 $I$ 重合. 这意味着 $\mathfrak{U}(L)$ 与对称代数 $\mathfrak{S}(L)$ 重合. (特别要指出的是，$i$: $L\to\mathfrak{U}(L)$ 在这里是内射.)

## 17.3. PBW 定理及其推论

到目前为止，我们对 $\mathfrak{U}(L)$ 的结构知道得还很少，只知道它包含有纯量. 为了简短起见，记 $\mathfrak{T}=\mathfrak{T}(L)$, $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(L)$, $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(L)$; 类似地，使用 $T^m$ 与 $S^m$ 代替 $T^mV$ 与 $S^mV$. 定义 $\mathfrak{T}$ 上的滤过为: $T_m=T^0\oplus T^1\oplus\cdots\oplus T^m$，且设 $U_m=\pi(T_m)$, $U_{-1}=0$. 很清楚，$U_mU_p\subset U_{m+p}$, $U_m\subset U_{m+1}$. 置 $G^m=U_m/U_{m-1}$ (这只是一个向量空间); 且以 $\mathfrak{U}$ 内的乘法定义一个双线性映射 $G^m\times G^p\to G^{m+p}$. (这一映射是有定义的，考虑: 为什么?) 它可扩张为一个双线性映射 $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}=\coprod\limits_{m=0}^{\infty}G^m$，使 $\mathfrak{G}$ 成为一个带 1 的阶化结合代数.

由于 $\pi$ 把 $T^m$ 映入 $U_m$，所以复合线性映射 $\phi_m$: $T^m\to U_m\to G^m=U_m/U_{m-1}$ 是有意义的. 因为 $\pi(T_m-T_{m-1})=U_m-U_{m-1}$，故它是满射的. 由映射 $\phi_m$ 联立起来就得到一个线性映射 $\phi$: $\mathfrak{T}\to\mathfrak{G}$，它是满射的(且将 1 映成 1).

**引理**　$\phi$: $\mathfrak{T}\to\mathfrak{G}$ 是一个代数同态. 此外，$\phi(I)=0$，所以 $\phi$ 诱导了从 $\mathfrak{S}=\mathfrak{T}/I$ 到 $\mathfrak{G}$ 上的一个同态 $\omega$.

证　设 $x\in T^m$, $y\in T^p$ 是齐次张量. 根据 $\mathfrak{G}$ 内乘积的定义，$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$，所以 $\phi$ 在 $\mathfrak{T}$ 上是乘法的. 设 $x\otimes y-y\otimes x$ ($x$, $y\in L$) 是 $I$ 的典型生成元. 则由定义，$\pi(x\otimes y-y\otimes x)\in U_2$. 另一方面，$\pi(x\otimes y-y\otimes x)=\pi([xy])\in U_1$，所以 $\phi(x\otimes y-y\otimes x)\in U_1/U_1=0$. 从而 $I\subset\operatorname{Ker}\phi$. ∎

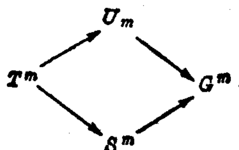
以下的定理是关于 $\mathfrak{U}(L)$ 的基本结果. 它 (或它的推论 C)

称为 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理(或简称 PBW 定理). 证明将在(17.4)给出.

**定理** 同态 $\omega$: $\mathfrak{S}\to\mathfrak{G}$ 是一个代数同构.

**推论 A** 设 $W$ 是 $T^m$ 的一个子空间. 假设典范映射 $T^m\to S^m$ 把 $W$ 同构地映到 $S^m$ 上, 则 $\pi(W)$ 是 $U_{m-1}$ 在 $U_m$ 内的余空间.

**证** 考虑下图(所有映射都是典范的):




由于前面的引理(及定义), 这是一个交换图. 因为 $\omega$: $\mathfrak{S}\to\mathfrak{G}$ 是一个同构(据定理), 所以底下的映射把 $W\subset T^m$ 同构地映到 $G^m$ 上. 回复到顶上的映射, 我们就得到此推论. ▌

**推论 B** 典范映射 $i$: $L\to\mathfrak{U}(L)$ 是内射(因而 $L$ 可等同于 $i(L)$).

**证** 这是推论 A 的特殊情况 $W=T^1(=L)$. ▌

我们已允许 $L$ 是无限维的. 实际上, 当 $L$ 具有可数基底的情形是适合于我们的意图的.

**推论 C** 设 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ 是 $L$ 的任一有序基. 则元素 $x_{i(1)}\cdots x_{i(m)}=\pi(x_{i(1)}\otimes\cdots\otimes x_{i(m)})$, $m\in\mathbf{Z}^+$, $i(1)\leqslant i(2)\leqslant\cdots\leqslant i(m)$, 再添上 1, 就构成了 $\mathfrak{U}(L)$ 的一个基.

**证** 设 $W$ 是 $T^m$ 的子空间, 它由所有的 $x_{i(1)}\otimes\cdots\otimes x_{i(m)}$, $i(1)\leqslant i(2)\leqslant\cdots\leqslant i(m)$ 所张成. 显然 $W$ 同构地映到 $S^m$ 上, 所以推论 A 说明了 $\pi(W)$ 是 $U_{m-1}$ 在 $U_m$ 内的余空间. ▌

象刚才构造的 $\mathfrak{U}(L)$ 的那样形式的基简称为 PBW 基.

**推论 D** 设 $H$ 是 $L$ 的子代数, 并且把 $H$ 的一个有序基 $(h_1, h_2, \cdots)$ 扩张为 $L$ 的有序基 $(h_1, \cdots, x_1, \cdots)$. 则由内射 $H\to L\to\mathfrak{U}(L)$ 所诱导的同态 $\mathfrak{U}(H)\to\mathfrak{U}(L)$ 也是内射的, 并且 $\mathfrak{U}(L)$ 是一个自由 $\mathfrak{U}(H)$-模, 具有由所有的 $x_{i(1)}\cdots x_{i(m)}$, $i(1)\leqslant i(2)\leqslant\cdots\leqslant$

$i(m)$，再添上1所组成的自由基.

证　这些结论可由推论C立即得出. ▮

为了后面的使用，注意以下的特殊事实:

**推论 E**　设 char F=0. 利用(17.1)的记号，典范映射的复合映射: $S^mL \to \tilde{S}^mL \to U_m$ 是从 $S^mL$ 到 $U_{m-1}$ 在 $U_m$ 内一个余空间上的(线性)同构.

证　使用推论 A，取 $W=\tilde{S}^m$. ▮

## 17.4. PBW 定理的证明

取定 $L$ 的一个有序基 $(x_\lambda;\lambda\in\Omega)$. 这一选择把 $\mathfrak{S}$ 等同于不定元 $z_\lambda(\lambda\in\Omega)$ 的多项式代数. 对于每一个指标的序列 $\Sigma=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ ($m$ 称为 $\Sigma$ 的长)，令 $z_\Sigma=z_{\lambda_1}\cdots z_{\lambda_m}\in S^m$，以及 $x_\Sigma=x_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes x_{\lambda_m}\in T^m$. 如果对于 $\Omega$ 的给定的序，有 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m$，则称 $\Sigma$ 是递增的. 规定 $\emptyset$(空集)是递增的，且 $z_\emptyset=1$. 所以 $\{z_\Sigma|\Sigma$ 递增$\}$ 是 $\mathfrak{S}$ 的一个基. 与分阶 $\mathfrak{S}=\coprod S^m$ 相关联的滤过是 $S_m=S^0\oplus\cdots\oplus S^m$. 在以下的引理内，若对所有的 $\mu\in\Sigma$，有 $\lambda\leqslant\mu$，则记 $\lambda\leqslant\Sigma$.

**引理 A**　对每一个 $m\in Z^+$，存在唯一的线性映射 $f_m: L\otimes S_m\to\mathfrak{S}$，它满足:

$(A_m)$ $f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)=z_\lambda z_\Sigma$，对 $\lambda\leqslant\Sigma$，$z_\Sigma\in S_m$.

$(B_m)$ $f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)-z_\lambda z_\Sigma\in S_k$，对 $k\leqslant m$，$z_\Sigma\in S_k$.

$(C_m)$ $f_m(x_\lambda\otimes f_m(x_\mu\otimes z_T))=f_m(x_\mu\otimes f_m(x_\lambda\otimes z_T))+f_m([x_\lambda x_\mu]\otimes z_T)$，对所有的 $z_T\in S_{m-1}$.

此外，$f_m$ 在 $L\otimes S_{m-1}$ 上的限制与 $f_{m-1}$ 重合.

证　注意到只要 $(B_m)$ 被证明，则 $(C_m)$ 内的各个项就都有意义了. 再注意到 $f_m$ 在 $L\otimes S_{m-1}$ 上的限制自动地满足 $(A_{m-1})$，$(B_{m-1})$，$(C_{m-1})$，故由唯一性的论断，这一限制映射必定与 $f_{m-1}$ 重合. 为了验证 $f_m$ 的存在性与唯一性，对 $m$ 施行归纳法: 当 $m=0$，只有 $z_\Sigma=1$ 出现，所以可令 $f_0(x_\lambda\otimes1)=z_\lambda$(且可线性地扩张到 $L\otimes S_0$). 显然 $(A_0)$，$(B_0)$，$(C_0)$ 是满足的，此外，$(A_0)$ 还说明对 $f_0$ 的选取是唯一可能的取法.

假定存在唯一的$f_{m-1}$满足$(A_{m-1})$, $(B_{m-1})$, $(C_{m-1})$. 下面说明如何把$f_{m-1}$扩张为映射$f_m$. 为此只要当$\Sigma$是长为$m$的递增序列时,定义$f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)$就够了.

对于$\lambda\leqslant\Sigma$的情形,除非定义$f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)=z_\lambda z_\Sigma$,否则$(A_m)$就不能成立. 当$\lambda\leqslant\Sigma$不成立时, $\Sigma$内第一个指标$\mu$必须要严格小于$\lambda$,所以$\Sigma=(\mu, T)$,这里$\mu\leqslant T$,且$T$的长是$m-1$. 由于$(A_{m-1})$, $z_\Sigma=z_\mu z_T=f_{m-1}(x_\mu\otimes z_T)$. 因为$\mu\leqslant T$, $f_m(x_\mu\otimes z_T)=z_\mu z_T$已被定义了, 所以$(C_m)$的左边变成$f_m(x_\lambda\otimes z_\Sigma)$. 另一方面, $(B_{m-1})$意味着$f_m(x_\lambda\otimes z_T)=f_{m-1}(x_\lambda\otimes z_T)\equiv z_\lambda z_T(\mathrm{mod}\, S_{m-1})$. 这说明$(C_m)$的右边已经定义为:

$$z_\mu z_\lambda z_T+f_{m-1}(x_\mu\otimes y)+f_{m-1}([x_\lambda x_\mu]\otimes z_T),\ y\in S_{m-1}.$$

以上论述说明$f_m$能够被定义,而且只有一种方法定义. 另外$(A_m)$和$(B_m)$显然成立. 当$\mu<\lambda$, $\mu\leqslant T$时, $(C_m)$也成立. 但是$[x_\mu x_\lambda]=-[x_\lambda x_\mu]$, 所以当$\lambda<\mu$, $\lambda\leqslant T$时, $(C_m)$也成立. 当$\lambda=\mu$时, $(C_m)$也正确. 剩下的就是考虑既非$\lambda\leqslant T$,又非$\mu\leqslant T$的情形. 记$T=(\nu, \Psi)$, 这里$\nu\leqslant\Psi$, $\nu<\lambda$, $\nu<\mu$. 为了对记号加以控制, 当$x\in L$, $z\in S_m$时,把$f_m(x\otimes z)$简写为$xz$.

归纳法假设保证了$x_\mu z_T=x_\mu(x_\nu z_\Psi)=x_\nu(x_\mu z_\Psi)+[x_\mu x_\nu]z_\Psi$,且由于$(B_{m-2})$, $x_\mu z_\Psi=z_\mu z_\Psi+w(w\in S_{m-2})$. 因为$\nu\leqslant\Psi$, $\nu<\mu$, 故$(C_m)$已可用于$x_\lambda(x_\nu(z_\mu z_\Psi))$. 由归纳假设, $(C_m)$也可用于$x_\lambda(x_\nu w)$,从而也可用于$x_\lambda(x_\nu(x_\mu z_\Psi))$. 因而:

$$\begin{aligned}x_\lambda(x_\mu z_T)=x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi))+[x_\lambda x_\nu](x_\mu z_\Psi)\\+[x_\mu x_\nu](x_\lambda z_\Psi)+[x_\lambda[x_\mu x_\nu]]z_\Psi.\end{aligned}\qquad(*)$$

回想一下, 在这一段论证中, $\lambda$和$\mu$是可交换的. 如果在$(*)$中把它们交换一下, 然后把所得的等式相减, 即可得到(利用Jacobi等式):

$$\begin{aligned}x_\lambda(x_\mu z_T)-x_\mu(x_\lambda z_T)&=x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi))-x_\nu(x_\mu(x_\lambda z_\Psi))\\&\quad+[x_\lambda[x_\mu x_\nu]]z_\Psi-[x_\mu[x_\lambda x_\nu]]z_\Psi\\&=x_\nu([x_\lambda x_\mu]z_\Psi)+[x_\lambda[x_\mu x_\nu]]z_\Psi\end{aligned}$$

$$+[x_\mu[x_\nu x_\lambda]]z_\Psi$$

$$=[x_\lambda x_\mu](x_\nu z_\Psi)+([x_\nu[x_\lambda x_\mu]]$$

$$+[x_\lambda[x_\mu x_\nu]]+[x_\mu[x_\nu x_\lambda]])z_\Psi=[x_\lambda x_\mu]z_T.$$

这就证明了$(C_m)$，从而得到了引理. ▋

**引理 B** 存在一个表示$\rho: L\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{S})$，满足

(a) $\rho(x_\lambda)z_\Sigma=z_\lambda z_\Sigma$，对 $\lambda\leqslant\Sigma$.

(b) $\rho(x_\lambda)z_\Sigma\equiv z_\lambda z_\Sigma(\mathrm{mod} S_m)$，若 $\Sigma$ 的长是 $m$.

**证** 引理 A 容许定义一个线性映射$f: L\otimes\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}$，它对所有的$m$满足$(A_m)$，$(B_m)$，$(C_m)$（由于唯一性，$f_m$ 限制于 $L\otimes S_{m-1}$ 是 $f_{m-1}$）. 也就是说，$\mathfrak{S}$ 成为一个 $L$-模（条件$(C_m)$），它提供了一个表示 $\rho$，由于$(A_m)$和$(B_m)$，$\rho$ 满足(a)，(b). ▋

**引理 C** 设 $t\in T_m\cap J$（$J=\mathrm{Ker}\,\pi$，$\pi: \mathfrak{T}\to\mathfrak{U}$ 是典范映射）. 则 $t$ 的$m$次齐次分量 $t_m$ 落在$I$（典范映射 $\mathfrak{T}\to\mathfrak{S}$ 的核）内.

**证** 把 $t_m$ 写成基元素 $x_{\Sigma(i)}(1\leqslant i\leqslant r)$的线性组合，每一 $\Sigma(i)$的长为 $m$. 根据 $\mathfrak{U}$ 的普遍性，引理 B 构造的李同态 $\rho: L\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{S})$可扩张成一个代数同态（也称为 $\rho$）$\mathfrak{T}\to\mathrm{End}\,\mathfrak{S}$，且 $J\subset\mathrm{Ker}\,\rho$. 所以 $\rho(t)=0$. 但是 $\rho(t)\cdot 1$ 是一个多项式，由引理 B，它的最高次项是 $z_{\Sigma(i)}(1\leqslant i\leqslant r)$的适当组合. 所以 $z_{\Sigma(i)}$ 的这一组合在 $\mathfrak{S}$ 内为 0，从而正如所要求的，$t_m\in I$，证毕. ▋

**PBW 定理的证明** 设 $t\in T^m$，$\pi$: $\mathfrak{T}\to\mathfrak{U}$ 是典范映射. 在此必须证明 $\pi(t)\in U_{m-1}$ 意味着 $t\in I$. 但 $t\in T^m$，$\pi(t)\in U_{m-1}$ 合在一起意味着 $\pi(t)=\pi(t')$对某一 $t'\in T_{m-1}$ 成立，所以 $t-t'\in J$. 应用引理 C 于张量 $t-t'\in T_m\cap J$，由于$m$次齐次分量是 $t$，从而得到 $t\in I$. ▋

## 17.5. 自由李代数

读者可能熟悉利用生成元和关系式构造群的方法. 在此将使用与 § 18 中类似的方法来构造半单纯李代数. 为此，需要自由李代数的概念.

设 $L$ 是由集合 $X$ 生成的 F 上的李代数. 若给出了从 $X$ 到李代数 $M$ 内的任一个映射 $\phi$, 必存在唯一的同态 $\psi$: $L\to M$, 它扩张了 $\phi$, 则称 $L$ 是在 $X$ 上的**自由李代数**. 读者易验证这样一个代数 $L$ 的唯一性(可以差一个唯一的同构). 至于它的存在性, 可从以 $X$ 作为基的向量空间 $V$ 出发, 构成张量代数 $\mathfrak{T}(V)$(通过方括号运算看作为一个李代数), 且令 $L$ 是由 $X$ 生成的 $\mathfrak{T}(V)$ 的李子代数, 当给出任一映射 $\phi$: $X\to M$ 后, $\phi$ 首先被扩张成为一个线性映射 $V\to M\subset\mathfrak{U}(M)$, 然后(典范地)扩张为一个结合代数同态 $\mathfrak{T}(V)\to\mathfrak{U}(M)$, 或一个李代数同态(它限制于 $L$ 正是所期望的 $\psi$: $L\to M$, 因为 $\psi$ 把生成元 $X$ 映入 $M$).

在此要提一下: 若 $L$ 在集合 $X$ 上是自由的, 则一个向量空间 $V$ 可被赋予一个 $L$-模结构, 这只要对每个 $x\in X$ 指定李代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个元素, 并且典范地扩张.

最后, 若 $L$ 是在 $X$ 上自由的, $R$ 是由元素 $f_j$($j$ 取遍某一指标集)生成的 $L$ 的理想. 则称 $L/R$ 是**带有生成元 $x_i$ 与关系式 $f_j=0$ 的李代数**(这里 $x_i$ 是 $X$ 的元素在 $L/R$ 内的象).

## 练 习

1. 证明: 若 $\dim L<\infty$, 则 $\mathfrak{U}(L)$ 没有零因子. [提示: 利用结合阶化代数 $\mathfrak{G}$ 同构于多项式代数这一事实.]

2. 设 $L$ 是 2 维非 Abel 李代数(1.4), $[xy]=x$. 直接证明 $i$: $L\to\mathfrak{U}(L)$ 是内射的(即 $J\cap L=0$).

3. 若 $x\in L$, 通过定义 $\operatorname{ad}x(y)=xy-yx$ $(y\in\mathfrak{U}(L))$ 把 $\operatorname{ad}x$ 扩张为 $\mathfrak{U}(L)$ 的一个自同态. 如果 $\dim L<\infty$, 证明 $\mathfrak{U}(L)$ 的每一元素落在一个有限维 $L$-子模内. [若 $x, x_1, \cdots, x_m\in L$, 验证 $\operatorname{ad}x(x_1\cdots x_m)=\sum_{i=1}^{m}x_1x_2\cdots\operatorname{ad}x(x_i)\cdots x_m$.]

4. 设 $L$ 是集 $X$ 上的自由李代数, 证明 $\mathfrak{U}(L)$ 同构于以 $X$ 为基的向量空间上的张量代数.

5. 描述集合 $X=\{x\}$ 上的自由李代数.

6. PBW 定理怎样被用来构造自由李代数?

【附注】

对 PBW 定理的处理是遵照 Bourbaki[1]. 另一种方式可见 Jacobson[1].

# 18. 生成元和关系式

现在回到对特征数 0 的代数闭域 F 上的半单纯李代数 $L$ 的研究. 目的是使用仅与根系 $\Phi$ 有关的生成元和关系式来描述 $L$, 从而证明以 $\Phi$ 为根系的半单纯李代数的存在性与唯一性. 在这一节内, 与一般的约定不同, 李代数可以是无限维的.

## 18.1. 被 $L$ 满足的关系式

设 $L$ 是半单纯李代数, $H$ 是 CSA, $\Phi$ 是相应的根系, $\Delta=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 是一个固定的基. 回想起 $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle=2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)=\alpha_i(h_j)\,(h_j=h_{\alpha_j})$. 取定一个标准生成元集 $x_i\in L_{\alpha_i}$, $y_i\in L_{-\alpha_i}$, 使得 $[x_iy_i]=h_i$.

**命题** 使用上述记号, $L$ 由 $\{x_i, y_i, h_i \mid 1\leqslant i\leqslant l\}$ 生成, 且这些生成元至少满足以下关系式:

(S1) $[h_ih_j]=0 \quad (1\leqslant i, j\leqslant l)$.

(S2) $[x_iy_i]=h_i$, $[x_iy_j]=0$ 若 $i\neq j$.

(S3) $[h_ix_j]=\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle x_j$, $[h_iy_j]=-\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle y_j$.

($S_{ij}^+$) $(\mathrm{ad}\, x_i)^{-\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle+1}(x_j)=0 \quad (i\neq j)$.

($S_{ij}^-$) $(\mathrm{ad}\, y_i)^{-\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle+1}(y_j)=0 \quad (i\neq j)$.

**证** 命题 14.2 意味着 $L$ 已由 $x_i$ 和 $y_i$ 所生成. 关系式(S1)是显然的, 至于(S2), 当 $i\neq j$ 时, $\alpha_i-\alpha_j\notin\Phi$ (引理 10.1). (S3) 是显然的. 现在考虑($S_{ij}^+$)(由对称性即能得到($S_{ij}^-$)). 由于 $i\neq j$, $\alpha_j-\alpha_i$ 不是根, 故经过 $\alpha_j$ 的 $\alpha_i$-链是 $\alpha_j$, $\alpha_j+\alpha_i$, $\cdots$, $\alpha_j+q\alpha_i$, 这里 $-q=\langle\alpha_j, \alpha_i\rangle$ (参见(9.4)或命题 8.4(e)). 因为 $\mathrm{ad}\, x_i$ 把 $x_j$ 逐次映入根空间 $\alpha_j+\alpha_i$, $\alpha_j+2\alpha_i$, $\cdots$, 即可推得($S_{ij}^+$). ▮

注意: 命题里的关系式所涉及到的常数仅与根系有关. Serre 发现这些关系式构成了 $L$ 的定义关系式的完全集合 (下面的定理 18.3). 作为证明 Serre 定理的第一步, 下面验看仅由(S1)～(S3)所定义的李代数(可能是无限维).

### 18.2. (S1)～(S3)的推论

固定一个根系$\Phi$以及基$\Delta=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$. 把Cartan整数$\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle$简记为$c_{ij}$. 我们从$3l$个生成元$\{\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{h}_i|1\leqslant i\leqslant l\}$的自由李代数$\hat{L}$(见(17.4))开始讨论. 设$\hat{K}$是$\hat{L}$内的理想,它由以下元素生成: $[\hat{h}_i\hat{h}_j]$, $[\hat{x}_i\hat{y}_j]-\delta_{ij}\hat{h}_i$, $[\hat{h}_i\hat{x}_j]-c_{ji}\hat{x}_j$, $[\hat{h}_i\hat{y}_j]+c_{ji}\hat{y}_j$. 置$L_0=\hat{L}/\hat{K}$, 且设$x_i$, $y_i$, $h_i$是生成元在$L_0$内的相应的象. (一般说来, $\dim L_0=\infty$.)

$L_0$带给我们的困难是它被定义得太抽象(就目前我们所知, 它可能是平凡的). 为了具体地研究$L_0$, 需要构造它的合适的表示. 下述的构造法是在第六章内将起重要作用的构造法的原型, 所以要求读者仔细地看下面的论证.

如同在(17.5)中所指出的, 构造一个$\hat{L}$模是不存在问题的: 只要给$3l$个生成元中的每一个指定一个线性变换与之对应即可. 设$V$是以$(v_1, \cdots, v_l)$为基的向量空间上的张量代数(=自由结合代数), 但忽略$V$内的乘积. 为了简便起见, 把$v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_t}$简写为$v_{i_1}\cdots v_{i_t}$. 这些张量(再添上1)构成F上$V$的基. 接下去, 再如下定义$V$的自同态:

$$\begin{cases}\hat{h}_j.1=0\\ \hat{h}_j.v_{i_1}\cdots v_{i_t}=-(c_{i_1j}+\cdots+c_{i_tj})v_{i_1}\cdots v_{i_t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{y}_j.1=v_j\\ \hat{y}_j.v_{i_1}\cdots v_{i_t}=v_jv_{i_1}\cdots v_{i_t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{x}_j.1=0=\hat{x}_j.v_i\\ \hat{x}_j.v_{i_1}\cdots v_{i_t}=v_{i_1}(\hat{x}_j.v_{i_2}\cdots v_{i_t})-\delta_{i_1j}(c_{i_2j}+\cdots+c_{i_tj})v_{i_2}\cdots v_{i_t}\end{cases}$$

这些生成元的作用可(唯一地)扩张到$\hat{L}$, 导致一个表示$\hat{\phi}$: $\hat{L}\to\mathfrak{gl}(V)$.

**命题** 设$\hat{K}_0=\operatorname{Ker}\hat{\phi}$, 则$\hat{K}\subset\hat{K}_0$, 即$\hat{\phi}$通过$L_0$作分解, 使$V$成为$L_0$-模.

**证** 首先, $\hat{h}_j$对角地作用在$V$上(关于$V$的取定的基), 所以$\hat{\phi}(\hat{h}_i)$和$\hat{\phi}(\hat{h}_j)$可交换, 即$[\hat{h}_i\hat{h}_j]\in\hat{K}_0$. 另一方面, $\hat{\phi}(\hat{y}_j)$只是用$v_j$

作左乘法.(只有 $\hat{x}_j$ 的作用比较复杂.)

在公式内置 $j=i_1$, 则得到 $\hat{x}_i.\hat{y}_j.v_{i_2}\cdots v_{i_t}-\hat{y}_j.\hat{x}_i.v_{i_2}\cdots v_{i_t}=-\delta_{ji}(c_{i_2i}+\cdots+c_{i_ti})v_{i_2}\cdots v_{i_t}=\delta_{ji}\hat{h}_i.v_{i_2}\cdots v_{i_t}$. 又, $(\hat{x}_i\hat{y}_j-\hat{y}_j\hat{x}_i).1=0=\delta_{ij}\hat{h}_i.1$. 所以, $[\hat{x}_i\hat{y}_j]-\delta_{ij}\hat{h}_i\in\hat{K}_0$.

接着, $(\hat{h}_i\hat{y}_j-\hat{y}_j\hat{h}_i).1=\hat{h}_i.v_j=-c_{ji}v_j=-c_{ji}\hat{y}_j.1$. 类似地,

$$
\begin{aligned}
(\hat{h}_i\hat{y}_j-\hat{y}_j\hat{h}_i).v_{i_2}\cdots v_{i_t}&=\hat{h}_i.v_jv_{i_2}\cdots v_{i_t}+(c_{i_2i}+\cdots+c_{i_ti})v_jv_{i_2}\cdots v_{i_t}\\
&=-c_{ji}\hat{y}_j.v_{i_2}\cdots v_{i_t}.
\end{aligned}
$$

所以, $[\hat{h}_i\hat{y}_j]+c_{ji}\hat{y}_j\in K_0$.

为了下一步的证明, 作以下的准备:

$$
\hat{h}_i.\hat{x}_j.v_{i_2}\cdots v_{i_t}=-(c_{i_2i}+\cdots+c_{i_ti}-c_{ji})\hat{x}_j.v_{i_2}\cdots v_{i_t}. \qquad (*)
$$

对 $t$ 运用归纳法加以证明. 当 $t=0$ 时(根据约定, $v_{i_2}\cdots v_{i_t}=1$), 两边都是 0. 归纳法假设是说 $\hat{x}_j.v_{i_2}\cdots v_{i_t}$ 是 $\hat{h}_i$ 的特征向量, 特征值是 $-(c_{i_2i}+\cdots+c_{i_ti}-c_{ji})$. 在这特征向量的左边乘以 $v_{i_1}$, 就得到 $\hat{h}_i$ 的另一特征向量, 其特征值是 $-(c_{i_1i}+\cdots+c_{i_ti}-c_{ji})$. 由此即可得(*).

使用(*)计算 $(\hat{h}_i\hat{x}_j-\hat{x}_j\hat{h}_i).1=0$, $(\hat{h}_i\hat{x}_j-\hat{x}_j\hat{h}_i).v_{i_2}\cdots v_{i_t}=(-(c_{i_2i}+\cdots+c_{i_ti}-c_{ji})+(c_{i_2i}+\cdots+c_{i_ti}))\hat{x}_j.v_{i_2}\cdots v_{i_t}=c_{ji}\hat{x}_j.v_{i_2}\cdots v_{i_t}$. 所以 $[\hat{h}_i\hat{x}_j]-c_{ji}\hat{x}_j\in\hat{K}_0$. 最终即得 $\hat{K}\subset\hat{K}_0$. ∎

**定理** 给定一个以 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 为基的根系 $\Phi$, 设 $L_0$ 是带有生成元 $\{x_i, y_i, h_i\mid 1\leqslant i\leqslant l\}$ 以及关系式(S1)~(S3)的李代数. 则 $h_i$ 是 $L_0$ 的 $l$ 维 abelian 子代数 $H$ 的一个基, 且 $L_0=Y+H+X$ (子空间的直和), 这里 $Y$(以及 $X$)是由 $y_i$(或 $x_i$)生成的 $L_0$ 的子代数.

**证** 分几步进行. 利用上面构造的表示 $\phi$: $L_0\to\mathfrak{gl}(V)$: 若 $x$ 是 $\hat{x}\in\hat{L}$ 在 $L_0$ 内的象, 则 $\phi(x)=\hat{\phi}(\hat{x})$.

(1) $\sum \mathsf{F}\hat{h}_j\cap\operatorname{Ker}\hat{\phi}=0$. 若 $\hat{h}=\sum_{j=1}^{l}a_j\hat{h}_j$, 且 $\hat{\phi}(\hat{h})=0$, 则 $\hat{\phi}(\hat{h})$ 的特征值 $-\sum_j a_jc_{ij}(1\leqslant i\leqslant l)$ 全为 0. 但 $\Phi$ 的 Cartan 矩阵 $(c_{ij})$ 是非奇异的, 这迫使所有 $a_j=0$, 即 $\hat{h}=0$.

(2) 典型映射 $\hat{L}\to L_0$ 同构地把 $\sum\mathsf{F}\hat{h}_j$ 映到 $\sum\mathsf{F}h_j$ 上. 这从(1)

立即可得.

(3) $\hat{L}$ 的子空间 $\sum \mathsf{F}\hat{x}_j+\sum \mathsf{F}\hat{y}_j+\sum \mathsf{F}\hat{h}_j$ 同构地映入 $L_0$. 固定 $i$, 关系式 $(S1)\sim(S3)$ 包含有: $[x_iy_i]=h_i$, $[h_ix_i]=2x_i$, $[h_iy_i]=-2y_i$, 所以 $\mathsf{F}x_i+\mathsf{F}y_i+\mathsf{F}h_i$ 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathsf{F})$ 的同态象. 但后者是单纯的, 且 $h_i\neq 0$ (第(2)步), 因此 $\mathsf{F}x_i+\mathsf{F}y_i+\mathsf{F}h_i$ 必须同构于 $\mathfrak{sl}(2,\mathsf{F})$. 现在集合 $\{x_j, y_j, h_j \mid 1\leqslant j\leqslant l\}$ 是线性无关的, 这是因为它的元素非零且满足关系式 $(S1)\sim(S3)$ (比较 $\operatorname{ad} h_j$ 的特征值). 这就证明了(3).

(4) $H=\sum \mathsf{F}h_j$ 是 $L_0$ 的 $l$ 维 abelian 子代数. 这从(2)和关系式$(S1)$可得出.

(5) 若 $[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]$ 表示 $[x_{i_1}[x_{i_2}\cdots[x_{i_{t-1}}x_{i_t}]\cdots]]$, 则 $[h_j[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]]=(c_{i_1j}+\cdots+c_{i_tj})[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]$, 且用 $y_i$ 代替 $x_i$, $-c_{ij}$ 代替 $c_{ij}$ 时, 也可得到类似结果. 对于 $t=1$, 这就是$(S3)$. 对于一般的情形, 使用 Jacobi 等式以及归纳法即可得到.

(6) 若 $t\geqslant 2$, 则 $[y_j[x_{i_1}\cdots x_{i_t}]]\in X$, 对 $Y$ 也有类似结果. 由关系式$(S2)$, $[y_jx_i]=-\delta_{ij}h_i$, 从而 $t=2$ 的情形可从 Jacobi 等式和$(S3)$立即得到. 很易对 $t$ 施行归纳法以完成论证.

(7) $Y+H+X$ 是 $L_0$ 的子代数, 所以与 $L_0$ 重合. 从(4), (5), (6)即可得出 $Y+H+X$ 是一个子代数. 但 $Y+H+X$ 包含有 $L_0$ 的生成元集合, 所以它与 $L_0$ 重合.

(8) $L_0=Y+H+X$ 是直和. 实际上, (5)说明了怎样把 $L_0$ 分解成 $\operatorname{ad} H$ 的特征子空间, 从而可得分解的直和性质(参看(1), (2)). ▮

利用"权"(使用 § 20 的语言)来描述分解 $L_0=Y+H+X$ 是方便的. 对于 $\lambda\in H^*$, 令 $(L_0)_\lambda=\{t\in L_0 \mid [ht]=\lambda(h)t$ 对所有 $h\in H\}$. 上面定理的证明已显示了 $H=(L_0)_0$. 此外, 使 $(L_0)_\lambda\neq 0$ 的仅有的非零 $\lambda$ 是形如 $\lambda=\sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i\ (k_i\in\mathbf{Z})$ 的, 且所有 $k_i\geqslant 0$ (记作 $\lambda\succ 0$) 或所有 $k_i\leqslant 0$ (记作 $\lambda\prec 0$). 此时有 $X=\sum_{\lambda\succ 0}(L_0)_\lambda$, $Y=\sum_{\lambda\prec 0}(L_0)_\lambda$.

## 18.3. Serre 定理

在(18.2)中研究了仅由$(S1)\sim(S3)$确定的李代数$L_0$的结构. 现在要问,如果再加上"有限性"条件——(18.1)的$(S_{ij}^+)$, $(S_{ij}^-)$后,会发生什么情况?置$x_{ij}=(\operatorname{ad}x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j)$, $y_{ij}=(\operatorname{ad}y_i)^{-c_{ji}+1}(y_j)$ $(i\neq j)$. (这些都是$L_0$的元素.)

**引理** 在(18.2)的代数$L_0$内, 对每个$i\neq j$有$\operatorname{ad}x_k(y_{ij})=0$ $(1\leqslant k\leqslant l)$.

**证** 情形(a): $k\neq i$. 则$[x_ky_i]=0$(由$(S2)$),所以$\operatorname{ad}x_k$和$\operatorname{ad}y_i$可交换. 于是$\operatorname{ad}x_k(y_{ij})=(\operatorname{ad}y_i)^{-c_{ji}+1}\operatorname{ad}x_k(y_j)$. 若$k=j$, 则成为$(\operatorname{ad}y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j)$. 但由$(S3)$, $\operatorname{ad}y_i(h_j)=c_{ij}y_i$, 如果是非零的, 则$c_{ji}$也非零(且是负的, 因为$i\neq j$), 所以$-c_{ji}+1\geqslant 2$. 从而$(\operatorname{ad}y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j)=0$. 若$k\neq j$,则$[x_ky_j]=0(S2)$, 因而可得同样论断.

情形(b): $k=i$. 回忆在定理 18.2 的证明中,$S=\mathsf{F}x_i+\mathsf{F}y_i+\mathsf{F}h_i$是$L_0$的子代数, 同构于$\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$. 因此关于$S$在$L_0$上的伴随作用,我们知道得相当多. 虽然$L_0$(一般说来)是无限维的, §7 中使用的某些推理还是可移用到目前的情况. 特别是因为$j\neq i$时, 有$[x_iy_j]=0$, 所以$y_j$是关于$S$的"极大向量", 其相应的"权"是$m=-c_{ji}$ (因为$[h_iy_j]=-c_{ji}y_j$). 对$t$施行归纳法即可证$\operatorname{ad}x_i(\operatorname{ad}y_i)^t(y_j)=t(m-t+1)(\operatorname{ad}y_i)^{t-1}(y_j)$. 所以当$t=-c_{ji}+1$时,右边是0. ▌

在叙述 Serre 定理之前, 先提一个有用的构造. 设$x$是无限维向量空间$V$的自同态, 如果$V$的每一个元素都被$x$的充分大的幂所零化, 则称$x$是局部幂零的. 此时$x$在$V$的每一个有限维子空间$W$上是幂零的,所以$\exp(x|_W)$是有意义的. 显然$\exp(x|_W)$与$\exp(x|_{W'})$在$W\cap W'$上是一致的, 因而可把这些映射拼在一起以得到$V$的一个自同构"$\exp x$".

**定理** (Serre) 取定一个以$\Delta=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$为基的根系$\Phi$. 设$L$是由$3l$个元素$\{x_i, y_i, h_i|1\leqslant i\leqslant l\}$所生成的李代数, 且约束于

(18.1)内所列出的$(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, $(S_{ij}^{+})$, $(S_{ij}^{-})$. 则 $L$ 是一个(有限维)半单纯李代数, 具有 $h_i$ 张成的 CSA 以及相应的根系 $\Phi$.

**证** 分几步进行. 由定义, $L=L_0/K$, $L_0$ 如同(18.2)里的一样, 且 $K$ 是由所有的 $x_{ij}$, $y_{ij}(i\neq j)$生成的理想. 为了避免记号上引起疑问, 首先在 $L_0$ 内工作. 设 $I$ (或者 $J$)是由所有 $x_{ij}$(或 $y_{ij}$)生成的 $X$(或 $Y$)的理想. (所以 $K$ 包含 $I$, $J$.)

(1) $I$ 和 $J$ 是 $L_0$ 的理想. 只要考虑 $J$ 就够了(对 $I$ 的论证是类似的). 一方面, $y_{ij}$ 是 $\operatorname{ad} h_k(1\leqslant k\leqslant l)$的一个特征向量, 其特征值为 $c_{jk}+(c_{ji}-1)c_{ik}$. 由于 $\operatorname{ad} h_k(Y)\subset Y$, 从 Jacobi 等式可得 $\operatorname{ad} h_k(J)\subset J$. 另一方面, 据上述引理 $\operatorname{ad} x_k(y_{ij})=0$. 显然, $\operatorname{ad} x_k$ 把 $Y$ 映入 $Y+H$ (见(18.2)). 将上述性质和 Jacobi 等式联系起来, 再加上 $\operatorname{ad} h_k(J)\subset J$, 则得到 $\operatorname{ad} x_k(J)\subset J$. 最后, 再一次由 Jacobi 等式, 得 $\operatorname{ad} L_0(J)\subset J$ (因为 $x_k$, $y_k$ 生成了 $L_0$).

(2) $K=I+J$. 由定义, $I+J\subset K$. 但 $I+J$ 是 $L_0$ 的理想(由(1)), 且包含所有的 $x_{ij}$, $y_{ij}$, 而 $K$ 又是这样的最小理想.

(3) $L=N^-+H+N$(子空间的直和), 这里 $N^-=Y/J$, $N=X/I$, 而且 $H$ 等同于它在典范映射 $L_0\to L$ 下的象. 利用(2)以及直和分解 $L_0=Y+H+X$ (定理 18.2).

(4) $\sum \mathsf{F}x_i+\sum \mathsf{F}h_i+\sum \mathsf{F}y_i$ 同构地映入 $L$. 因为 $H$ 同构地映入 $L$(由上述的(3)), 故可按照定理 18.2 的证明中的(3)同样处理. 所以可把 $x_i$, $y_i$, $h_i$ 看成 $L$ 的元素(并且它们生成了 $L$).

(5) 若 $\lambda\in H^*$, 令 $L_\lambda=\{x\in L\mid [hx]=\lambda(h)x$ 对所有的 $h\in H\}$. 则 $H=L_0$, $N=\sum\limits_{\lambda\succ 0} L_\lambda$, $N^-=\sum\limits_{\lambda\prec 0} L_\lambda$(参看(18.2)末尾的陈述), 且每一个 $L_\lambda$ 是有限维的. 由于(3), (4), 这是显然的.

(6) 对于 $1\leqslant i\leqslant l$, $\operatorname{ad} x_i$ 和 $\operatorname{ad} y_i$ 是 $L$ 的局部幂零自同态. 只要对固定的 $i$, 考察 $\operatorname{ad} x_i$ 就够了(根据对称性). 设 $M$ 是由 $L$ 内所有被 $\operatorname{ad} x_i$ 的某一乘幂所零化的元素组成的子空间, 若 $x\in M$ (或 $y\in M$)被$(\operatorname{ad} x_i)^r$(或$(\operatorname{ad} x_i)^s$)零化, 则$[xy]$被$(\operatorname{ad} x_i)^{r+s}$零化(见引理 15.1). 故 $M$ 实际上是 $L$ 的子代数. 但所有的 $x_k\in M$ (由关系式$(S_{ij}^{+})$)及所有的 $y_k\in M$ (由$(S2)$, $(S3)$)生成了 $L$, 因而得

$M=L$, 这正是所要证明的.

(7) $\tau_i=\exp(\operatorname{ad} x_i)\exp(\operatorname{ad}(-y_i))\exp(\operatorname{ad} x_i)$(对 $1\leqslant i\leqslant l$)是 $L$ 的一个自同构. 这一点从 (6) 和本定理前面的一段陈述即可得出.

(8) 若 $\lambda,\ \mu\in H^*$, 且 $\sigma\lambda=\mu$ ($\sigma\in\mathscr{W}$, $\Phi$ 的 Weyl 群), 则 $\dim L_\lambda=\dim L_\mu$. 只要对当 $\sigma=\sigma_i$ 是一个单反射时, 加以证明就够了[因为它们生成了 $\mathscr{W}$(定理 10.3(d))]. 按(7)构造的 $L$ 的自同构 $\tau_i$ 在有限维空间 $L_\lambda+L_\mu$ 上与指数映射的通常的乘积相重合, 且我们可以断定(如同(7.2)的最后一部分): $\tau_i$ 交换了 $L_\lambda$ 与 $L_\mu$. 从而更有 $\dim L_\lambda=\dim L_\mu$.

(9) 对 $1\leqslant i\leqslant l$, 有 $\dim L_{\alpha_i}=1$, 而对整数 $k\neq 0,\ 1,\ -1$, 则有 $L_{k\alpha_i}=0$. 这对 $L_0$ 是显然的, 由于(4), 对 $L$ 也是正确的.

(10) 若 $\alpha\in\Phi$, 则 $\dim L_\alpha=1$, 但对 $k\neq 0, 1, -1$, 则有 $L_{k\alpha}=0$. 因为每一个根都是 $\mathscr{W}$-共轭于一个素根(定理 10.3(c)), 所以这可从(8), (9)得出.

(11) 若 $L_\lambda\neq 0$, 则或有 $\lambda\in\Phi$, 或有 $\lambda=0$. 否则 $\lambda$ 是素根的整组合, 带有同样符号的系数(且不全为 0). 由于(10), $\lambda$ 不是任何根的倍数. 练习 10.10 证明了 $\lambda$ 的某一个 $\mathscr{W}$-共轭元 $\sigma\lambda$ 具有严格正及严格负的系数. 这意味着 $L_{\sigma\lambda}=0$(见(5)), 与(8)的结论相矛盾.

(12) $\dim L=l+\operatorname{Card}\Phi<\infty$. 由于(5), 这可从(10), (11)得到.

(13) $L$ 是半单纯的. 设 $A$ 是 $L$ 的 Abel 理想, 我们证明 $A=0$. 由于 $\operatorname{ad} H$ 使 $A$ 不变, $A=(A\cap H)+\sum\limits_{\alpha\in\Phi}(A\cap L_\alpha)$ (因为 $L=H+\sum\limits_{\alpha\in\Phi}L_\alpha$). 若 $L_\alpha\subset A$, 则 $[L_{-\alpha}L_\alpha]\subset A$, 从而 $L_{-\alpha}\subset A$, 且 $A$ 含有单纯代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$的一个同构象(见(4)), 这是荒谬的. 所以应是 $A=A\cap H\subset H$. 因而 $[L_\alpha A]=0(\alpha\in\Phi)$, 即 $A\subset\bigcap\limits_{\alpha\in\Phi}\operatorname{Ker}\alpha=0$ ($\alpha_i$ 张成 $H^*$).

(14) $H$ 是 $L$ 的 CSA, $\Phi$ 是根系. $H$ 是 Abel 的(从而是幂零

的)，而且是自正规的(由于直和分解 $L=H+\sum_{\alpha\in\Phi}L_\alpha$)，即 $H$ 是一个 CSA．此时 $\Phi$ 则显然是相应的根系．▮

## 18.4．应用：存在与唯一定理

**定理** (a) 设 $\Phi$ 是一个根系．则存在一个半单纯李代数，以 $\Phi$ 作为它的根系．

(b) 设 $L, L'$ 是半单纯李代数，分别有 CSA 为 $H, H'$ 以及根系 $\Phi, \Phi'$．设同构 $\Phi\to\Phi'$ 已知，它把已知基 $\Delta$ 映到另一个基 $\Delta'$，且用 $\pi: H\to H'$ 表示相关联的同构(如同(14.2))．对每一个 $\alpha\in\Delta$ (或 $\alpha'\in\Delta'$)，选取任意的非零 $x_\alpha\in L_\alpha$(或 $x'_{\alpha'}\in L'_{\alpha'}$)．则存在唯一的同构 $\pi: L\to L'$，它扩张了 $\pi: H\to H'$，且把 $x_\alpha$ 映成 $x'_{\alpha'}$ $(\alpha\in\Delta)$．

**证** 关于(a)，从定理 18.3 即可得．关于(b)选取 $y_\alpha$, $y'_{\alpha'}$，满足 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$, $[x'_{\alpha'}y'_{\alpha'}]=h'_{\alpha'}=\pi(h_\alpha)$ $(\alpha\in\Delta,\ \alpha'\in\Delta')$．因为 $x'_{\alpha'}$, $y'_{\alpha'}$, $h'_{\alpha'}$ $(\alpha'\in\Delta')$ 满足定理 18.3 中定义 $L$ 的关系式，所以存在唯一的同态 $\pi: L\to L'$，它把 $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$ $(\alpha\in\Delta)$ 分别映到 $x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}, h'_{\alpha'}$ 上．显然 $\pi$ 扩张了已知的同构 $H\to H'$．此外，同样的论证可得到同态 $\pi': L'\to L$，且它们的合成映射是在 $L$ 或 $L'$ 的生成元上的恒等映射，故 $\pi$ 是一个同构．▮

### 练 习

1．使用 $L_0$ 在 $V$ 上的表示(命题 18.2)，证明定理 18.2 所描述的代数 $X, Y$ 分别是 $x_i$ 和 $y_i$ 的集合上的自由李代数．

2．当 rank $\Phi=1$ 时，关系式$(S^+_{ij})$，$(S^-_{ij})$是空的，所以 $L_0=L\cong\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$．通过适当地改变(18.2)内 $V$ 的基，证明 $V$ 同构于练习 7.7 内的模 $Z(0)$．

3．证明在(18.3)内 $L_0$ 的理想 $K$ 位于 $L_0$ 的每一个具有有限余维数的理想内(即 $L$ 是 $L_0$ 的最大有限维商代数)．

4．证明 Dynkin 图的每一包含关系(例如 $\mathsf{E}_6\subset\mathsf{E}_7\subset\mathsf{E}_8$)可诱导出相应的半单纯李代数的自然包含关系．

【附注】

实质上，定理 18.2 的证明是属于(各自独立地)Chevalley 和 Harish-Chandra 的(见 Harish-Chandra[1])，由 Jacobson(见 Jacobson[1])作了简化．Serre 定理及其对唯一性和存在性的应用，出现在 Serre[2]内．参看 Varadarajan[1]．

## 19. 单纯代数

如同§18，F是特征数0的代数闭域. 在本节内我们把关于F上的单纯李代数的资料收集起来(其中的大部分已在练习中指出)，根据分类定理，存在一个且仅有一个(在同构的意义下)单纯李代数，它具有根系 $A_l(l\geqslant1)$，$B_l(l\geqslant2)$，$C_l(l\geqslant3)$，$D_l(l\geqslant4)$，$E_6$，$E_7$，$E_8$，$F_4$，$G_2$. 我们将对典型类型A～D以及$G_2$给出适当完整的描述. 至于其余的例外代数，它们所需的Jordan代数以及诸如此类的预备知识则离题太远了(见后面的附注).

### 19.1. 半单纯性准则

在理论上我们可通过计算Killing型以检验一个已给李代数的半单纯性(定理5.1)，但实际上，有一个更简单的方法. 首先给出一个定义(见练习6.5). 如果李代数 $L\neq0$ 满足 $\mathrm{Rad}\,L=Z(L)$，则称为简约的. 它有两个极端的情形：$L$ Abel或 $L$ 半单纯. $\mathfrak{gl}(V)$是中间的情形. 现在假设 $L$ 是简约的，但不是Abel的，所以 $L'=L/Z(L)$ 是半单纯的. 故 $\mathrm{ad}\,L\cong\mathrm{ad}\,L'$ 作用在 $L$ 上是完全可约的(6.3). 记 $L=M\oplus Z(L)$，$M$ 是一个理想. 尤其是 $[LL]=[MM]\subset M$. 但在典范映射下，$[LL]$ 映到 $L'$ 上，所以 $L=[LL]\oplus Z(L)$. 这些话蕴含了以下命题的第一部分.

**命题** (a) 设 $L$ 是简约的. 则 $L=[LL]\oplus Z(L)$，且 $[LL]$ 或者半单纯，或者是0.

(b) 设 $L\subset\mathfrak{gl}(V)$ ($V$ 有限维)为不可约地作用在 $V$ 上的非零李代数. 则 $L$ 是简约的，$\dim Z(L)\leqslant1$. 如果再添上 $L\subset\mathfrak{sl}(V)$，则 $L$ 是半单纯的.

**证** 现在证(b). 设 $S=\mathrm{Rad}\,L$. 由李定理，$S$ 在 $V$ 内有一个公共特征向量，即 $s.v=\lambda(s)v$ $(s\in S)$. 如果 $x\in L$，则 $[sx]\in S$ 意味着 $s.(x.v)=\lambda(s)x.v+\lambda([sx])v$ (*). 因为 $L$ 的作用是不可约的，故 $V$ 内所有的向量都可通过对 $v$ 重复应用 $L$ 的元素以及构成线性组合而得到. 由(*)可以得出，所有的 $s\in S$ 的矩阵(关于 $V$

的一个适当的基)将是三角形的，$\lambda(s)$是仅有的对角线元素．但是换位子$[SL]\subset S$的迹是0，所以这一条件迫使$\lambda$在$[SL]$上等于0．回顾(*)，可得出结论：$s\in S$对角地作用在$V$上，相当于纯量$\lambda(s)$．尤须指出的是$S=Z(L)$．(所以$L$是简约的)且$\dim S\leqslant 1$．最后，设$L\subset \mathfrak{sl}(V)$．由于$\mathfrak{sl}(V)$不含有0以外的纯量(char $\mathsf{F}=0$)，故$S=0$，$L$是半单纯的．∎

## 19.2. 典 型 代 数

在(1.2)中已经引入了典型代数．为了避免重复，作如下限制：$\mathsf{A}_l(l\geqslant 1)$，$\mathsf{B}_l(l\geqslant 2)$，$\mathsf{C}_l(l\geqslant 3)$，$\mathsf{D}_l(l\geqslant 4)$(参见练习1.10和§11内的分类)．因为$\mathfrak{gl}(V)=\mathfrak{sl}(V)+$纯量，且因$\mathfrak{gl}(V)$不可约地作用在$V$上(甚至是可迁地)，显然$\mathfrak{sl}(V)$的作用也是不可约的．这是使用命题19.1的准则，给出$\mathsf{B}_l$，$\mathsf{C}_l$，$\mathsf{D}_l$的半单纯性证明的原型．(我们已在(1.2)内看到，这些代数由迹0的自同态构成，所以需要验证的就是不可约性．)

注意到在$\mathfrak{gl}(V)$的子代数$L$下不变的$V$的任一子空间也在End $V$的由1和$L$生成的(结合)子代数下不变．所以为了证明$\mathsf{B}_l$，$\mathsf{C}_l$，$\mathsf{D}_l$在它们的自然表示下的作用是不可约的，只要证明$V$的任一自同态都可从1和$L$出发，使用加法、数乘与通常的乘法而得到即可．从1，可得到所有纯量阵；从对角阵(如(1.2)中所给出的)，可得到所有可能的对角阵．然后用合适的对角阵diag$(0,\cdots,1,\cdots,0)$(第$i$个位置上是1)去乘其它各个基元素(例如$e_{ij}-e_{ji}$，$i\neq j$)，就可导出所有的对角线外的矩阵单位$e_{ij}$，这是可以验证的．

上面的论证说明了典型代数都是半单纯的．在上述各种情形里，由对角阵(如(1.2)中所列举的)张成的$l$-维子代数$H$显然是环面的，且等于它在$L$内的中心化子，从而是极大环面子代数(=CSA)．在(1.2)中所述的其余基元素是根向量，故很易得出适当的素根的集合，从而说明$L$是单纯的，属于所指出的型．

## 19.3. 代 数 $G_2$

在第六章将看到，型 $G_2$ 的单纯代数有一个由 $7\times 7$ 矩阵的一一不可约表示，且矩阵阶数不能低于 7. 实际上，表示矩阵位于 $L_0=\mathfrak{o}(7, F)$，即型 $B_3$ 的单纯代数内. 由于 $\dim L_0=21$，而 $G_2$ 的维数是 14，故作为 $L_0$ 的子代数 $L$ 以直接描述 $G_2$ 是不困难的(利用事后认识到的规律性作为启发).

如同(1.2)中，存在一个 $L_0$ 的标准基，用矩阵单位 $e_{rs}(1\leqslant r, s\leqslant 7)$ 表示. 在以下的讨论中，为了方便些，使指标 $i, j, k, \cdots$ 总是取值 1, 2, 3. 回想起 $L_0$ 有一个 CSA $H_0$，其基为 $(d_1, d_2, d_3)$，$d_i=e_{i+1,i+1}-e_{i+4,i+4}$. 子代数 $L$ 的 CSA 的候选者将是

$$H=\{\sum a_i d_i \mid \sum a_i=0\}.$$

当然，$\dim H=2$.

$G_2$ 的 6 个长根本身就构成一个型 $A_2$ 的系(练习 12.4)，与此相对应，可如下选取 $L_0$ 关于 $H_0$ 的根向量 $g_{i,-j}(i\neq j)$:

$$g_{1,-2}=g^t_{2,-1}=e_{23}-e_{65},$$

$$g_{1,-3}=g^t_{3,-1}=e_{24}-e_{75},$$

$$g_{2,-3}=g^t_{3,-2}=e_{34}-e_{76}.$$

至于 $L$ 关于 $H$ 的短根，取 $g_{\pm i}(i=1, 2, 3)$:

$$g_1=-g^t_{-1}=\sqrt{2}(e_{12}-e_{51})-(e_{37}-e_{46}),$$

$$g_2=-g^t_{-2}=\sqrt{2}(e_{13}-e_{61})+(e_{27}-e_{45}),$$

$$g_3=-g^t_{-3}=\sqrt{2}(e_{14}-e_{71})-(e_{26}-e_{35}).$$

注意到刚才列举的 12 个向量确实都是 $\operatorname{ad} H$ 的公共特征向量，而且没有一个中心化 $H$. 现在可定义 $L$ 为由 $H$ 以及这 12 个向量所张成的空间. 以下的等式意味着 $L$ 在方括号运算下是封闭的. 读者不难验证它们(利用转置关系可减少需要验证的次数).

(1) $$[g_{i,-j}, g_{k,-l}]=\delta_{jk}g_{i,-l}-\delta_{il}g_{k,-j}$$

(2) $$[g_i, g_{-i}]=3d_i-(d_1+d_2+d_3)$$

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned}[g_{i,-j},\ g_k]&=-\delta_{ik}g_j\\ [g_{i,-j},\ g_{-k}]&=\delta_{jk}g_{-i}\end{aligned}\right\}$$

$$(4)\qquad [g_i,\ g_{-j}]=3g_{j,-i}\qquad (i\neq j)$$

$$(5)\qquad \left.\begin{aligned}[g_i,\ g_j]&=\pm 2g_{-k}\\ [g_{-i},\ g_{-j}]&=\pm 2g_k\end{aligned}\right\}\qquad (i,\ j,\ k\text{ 不相同})$$

(5)里的符号可从以下等式读出:

$$[g_1,\ g_2]=2g_{-3},\ [g_1,\ g_3]=-2g_{-2},\ [g_2,\ g_3]=2g_{-1}$$

(再利用含有转置的等式).

从上述可以推得:$L$ 是 14 维李代数,$H$ 是 $L$ 的 CSA(2 维),$L$ 为迹 0 的矩阵组成. 如果 $L$ 是半单纯的,则由前面的分类可知,可能的根系仅仅是 $G_2$. 因而据命题 19.1,剩下的工作就是验证 $L$ 不可约地作用在 $V=F^7$ 上. 设 $V$ 的标准有序基为($v_0$, $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_{-1}$, $v_{-2}$, $v_{-3}$). 矩阵 diag(0, 1, 2, −3, −1, −2, 3)属于 $H$,且有不同特征值,所以 $V$ 的任意一个在 $L$ 下不变的子空间 $W\neq 0$ 必须至少含有一个标准基向量. 接着再看到 $g_{\pm i}$ 把 $v_0$ 映到 $v_{\mp i}$ 的倍数、把 $v_{\pm j}$ 映到 $v_k$ 的倍数($i, j, k$ 不相同),而 $g_{i,-j}.v_j=v_i$, $g_{i,-j}.v_{-i}=-v_{-j}$. 这些等式迫使 $W$ 包含所有的基向量,从而 $W=V$, 正是我们所需的.

另一种有趣的方法,是把型 $G_2$ 的单纯代数实现为李代数 Der $\mathfrak{C}$(见(1.3)),这里 $\mathfrak{C}$ 是一个 8-维非结合代数(Cayley 代数或称八元数代数). 首先必须描述 $\mathfrak{C}$. 设($e_1$, $e_2$, $e_3$)是 $F^3$ 的通常标准正交基(被赋予一个通常的内积 $v\cdot w$). $F^3$ 还有一个向量积(或叉积)$v\times w=-(w\times v)$, 满足规则 $e_i\times e_i=0(i=1,\ 2,\ 3)$, $e_1\times e_2=e_3$, $e_2\times e_3=e_1$, $e_3\times e_1=e_2$. 作为一个向量空间,$\mathfrak{C}$ 是 2 个 $F^3$ 与 2 个 $F$ 之和. 为了方便起见,把 $\mathfrak{C}$ 的元素写成 2×2 矩阵 $\begin{pmatrix} a & v\\ w & b\end{pmatrix}$, 其中 $a$, $b\in F$, 且 $v$、$w\in F^3$. 加法和数乘与通常矩阵相同. 至于 $\mathfrak{C}$ 的乘积,是用更复杂的方法给出的:

$$\begin{pmatrix} a & v\\ w & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & v'\\ w' & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'-v\cdot w' & av'+b'v+w\times w'\\ a'w+bw'+v\times v' & bb'-w\cdot v'\end{pmatrix}$$

因为 F 内的纯量乘积以及 $\mathsf{F}^3$ 内的内积和叉积都是双线性的，所以这一运算显然是双线性的.

取定 $\mathfrak{C}$ 的一个基$(c_1, \cdots, c_8)$，这里

$$c_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad c_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$c_{2+i}=\begin{pmatrix}0 & e_i\\ 0 & 0\end{pmatrix}, c_{5+i}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ e_i & 0\end{pmatrix}\quad (i=1, 2, 3).$$

很易验证 $\mathfrak{C}$ 的乘法表(表 1).

表 1

| | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ | $c_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_1$ | $c_1$ | 0 | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | 0 | 0 | 0 |
| $c_2$ | 0 | $c_1$ | 0 | 0 | 0 | $c_6$ | $c_7$ | $c_8$ |
| $c_3$ | 0 | $c_3$ | 0 | $c_8$ | $-c_7$ | $-c_1$ | 0 | 0 |
| $c_4$ | 0 | $c_4$ | $-c_8$ | 0 | $c_6$ | 0 | $-c_1$ | 0 |
| $c_5$ | 0 | $c_5$ | $c_7$ | $-c_6$ | 0 | 0 | 0 | $-c_1$ |
| $c_6$ | $c_6$ | 0 | $-c_2$ | 0 | 0 | 0 | $c_5$ | $-c_4$ |
| $c_7$ | $c_7$ | 0 | 0 | $-c_2$ | 0 | $-c_5$ | 0 | $c_3$ |
| $c_8$ | $c_8$ | 0 | 0 | 0 | $-c_2$ | $c_4$ | $-c_3$ | 0 |

注意 $c_1+c_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$对代数 $\mathfrak{C}$ 的作用相当于恒等元. 按照对换位子 $cc'-c'c$ 的常规检验方法(使用基元素及表 1)，可证由所有换位子张成的子空间 $\mathfrak{C}_0$ 的余维数是 1，基是$(c_1-c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8)$，与通过 $c_1+c_2$ 的直线互余. 此外，$\mathfrak{C}_0$ 重合于 $\mathfrak{C}$ 内"迹"为 0$(b=-a)$ 的所有元素的空间. 由于乘积规则，$\mathfrak{C}$ 的任意一个导子都使"常数"(即 $c_1+c_2$ 的倍数)变成 0. 另一方面，导子显然使 $\mathfrak{C}_0$ 不变，所以它被它在 $\mathfrak{C}_0$ 上的限制所完全确定.

置 $L=\operatorname{Der}\mathfrak{C}$. 根据以上所述，$L$ 作用在 $\mathfrak{C}_0$ 上是一一的(而在 $\mathsf{F}(c_1+c_2)$ 上是平凡的). 把相伴的矩阵表示($\mathfrak{C}_0$ 的基按上述的取法)记为 $\phi: L\to\mathfrak{gl}(7, \mathsf{F})$. 现在主要的问题是说明 $L$ 并不太小，为

此我们必须列举出 $\mathfrak{C}$ 的一些导子. 因为型 $\mathsf{G}_2$ 的根系里的长根构成一个型 $\mathsf{A}_2$ 的系,所以 $L$ 应该包含有 $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ 的一个同构象. 对 $x \in \mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$, 定义 $\mathfrak{C}$ 的一个自同态 $\delta(x)$ 为 $\begin{pmatrix} a & v \\ w & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x(v) \\ -x^t(w) & 0 \end{pmatrix}$ ($x^t = x$ 的转置). 验证 $\delta(x)$ 是一个导子以及 $x \mapsto \delta(x)$ 是 $\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$ 的一个(非平凡的,从而是一一的)表示,只是一个例行的手续. 把象集记为 $M$, 且把对角子代数的象记为 $H$. (注意 $\phi(M)$ 在 $\mathfrak{o}(7, \mathsf{F})$ 内,且 $\phi(H)$ 与前面所述的 $\mathsf{G}_2$ 的 CSA 重合.)很易检验: 在 $\mathfrak{gl}(8, \mathsf{F})$ 内与 $H$ 可交换的矩阵都具有形状 $\mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3, x, a_4, a_5, a_6)$, 这里 $x \in \mathfrak{gl}(2, \mathsf{F})$, 而且这样一个矩阵只有当它在 $H$ 里才能表示一个 $\mathfrak{C}$ 的导子. 所以 $H$ 就是它自己在 $L$ 内的中心化子. 因为 $Z(M) = 0$, 故也可推导出 $Z(L) = 0$.

为了推断 $L$ 是型 $\mathsf{G}_2$ 的单纯李代数, 我们还要找出 $\mathfrak{C}$ 的更多的导子(与短根相对应),然后再用它们证明 $L$ 在 $\mathfrak{C}_0$ 内具有不可约地作用. 实际上我们已经如此选取了 $\mathfrak{C}_0$ 的基, 使得 $L$ 的矩阵表示 $\phi$ 恰好就是上面所研究的那一种(在 $\mathfrak{o}(7, \mathsf{F})$ 内). 可以直接验证前述的代数 $L$ 是由 $\mathfrak{C}$ 的导子的象所构成(但十分烦琐!). 作为一种替代方法, $\mathfrak{C}$ 的某些导子(称为"内导子")可以在内部被定义, 然后证明它与前面列举的矩阵相对应. 这些将在下面练习中指出来.

## 练　习

1. 若 $L$ 是李代数, $[LL]$ 是半单纯的, 则 $L$ 是简约的.

2. 对(19.2)中概述的论证提供细节.

3. 验证在(19.3)内关于 $\mathfrak{C}_0$ 的论断.

4. 验证在 (19.3) 内定义的 $\delta(x)$, $x \in \mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$, 是 $\mathfrak{C}$ 的一个导子.

5. 证明 Cayley 代数 $\mathfrak{C}$ 满足"交错律": $x^2y = x(xy)$, $yx^2 = (yx)x$. 证明在任一个满足交错律的代数 $\mathfrak{A}$ 内, 以下形式的自同态实际上是一个导子: $[\lambda_a, \lambda_b] + [\lambda_a, \rho_b] + [\rho_a, \rho_b]$ ($a, b \in \mathfrak{A}$, $\lambda_a = \mathfrak{A}$ 内用 $a$ 作左乘, $\rho_b = \mathfrak{A}$ 内用 $b$ 作右乘, 方括号表示自同态的换位子).

6. 给(19.3)末尾的论证补充细节.

【附注】

Tits 已用统一的形式构造了 5 个例外的单纯代数. 关于其详细情况可参看 Jacobson [2], Schafer [1]. 这里讨论的单纯李代数的特征数 $p$ 的相似物由 Seligman [1] 所研究, 参看 Kaplansky [1], Pollack [1]. 我们把 $G_2$ 构造成 $\mathfrak{o}(7, F)$ 的子代数是受到李群讨论班第 14 讲的启发. (但那里的公式有一些错误.)

# 第六章　表 示 理 论

在这一章里，$L$ 将表示一个半单纯李代数(在特征数 0 的代数闭域 F 上)，$H$ 是 $L$ 的一个固定的 CSA，$\Phi$ 是根系，$\Delta=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 是 $\Phi$ 的基，$\mathscr{W}$ 是 Weyl 群. 主要目的是研究有限维 $L$-模(虽然也可能出现某些无限维模). 由于关于完全可约性的 Weyl 定理，在有限维的情形中，不可约模将居于支配的地位.

## 20. 权与极大向量

### 20.1. 权 空 间

设 $V$ 是有限维 $L$-模. 从定理 6.4 可推得 $H$ 对角地作用于 $V$ 上: $V=\coprod V_\lambda$，$\lambda$ 取遍 $H^*$，且 $V_\lambda=\{v\in V \mid h.v=\lambda(h)v$ 对所有 $h\in H\}$. 对任意的 $V$，子空间 $V_\lambda$ 仍然是有定义的. 只要 $V_\lambda\neq 0$，我们就称它为权空间，且称 $\lambda$ 为 $V$ 的权(更确切地说: "$H$ 在 $V$ 上的权").

**例** (1)通过伴随表示把 $L$ 自己看成一个 $L$-模，我们可看到权就是根 $\alpha\in\Phi$ (权空间 $L_\alpha$ 是一维的) 以及 0 (权空间 $H$ 是 $l$ 维的). (2)当 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$时，$H$ 上的线性函数 $\lambda$ 被它在基向量 $h$ 上的值 $\lambda(h)$所完全确定，所以实际上是在利用 § 7 内的权. (在此读者需把那一节作一复习)。

如果 $\dim V=\infty$，则不能保证 $V$ 是它的权空间之和(练习 2). 虽然如此，所有权空间 $V_\lambda$ 之和 $V'$ 总是直和: 它的证明，本质上和证明一个单独线性变换的不同特征值的特征向量的线性无关是一样的 (练习 1). 此外，$V'$ 是 $V$ 的 $L$-子模: 这可从 $L_\alpha(\alpha\in\Phi)$置换了权空间这一事实得出. 也就是说，若 $x\in L_\alpha$, $v\in V_\lambda$, $h\in H$, 则 $h.x.v=x.h.v+[hx].v=(\lambda(h)+\alpha(h))x.v$，所以 $L_\alpha$ 把 $V_\lambda$ 变成

$V_{\lambda+\alpha}$. 归纳起来，得：

引理 设 $V$ 是任意的 $L$-模. 则

(a) $L_\alpha$ 把 $V_\lambda$ 映入 $V_{\lambda+\alpha}$ ($\lambda\in H^*$, $\alpha\in\Phi$).

(b) $V'=\sum_{\lambda\in H^*}V_\lambda$ 是直和，且 $V'$ 是 $V$ 的 $L$-子模.

(c) 若 $\dim V<\infty$，则 $V=V'$. ∎

## 20.2. 标准循环模

作为定义，在 $L$ 模 $V$ 内的一个(权 $\lambda$ 的)极大向量是一个非零向量 $v^+\in V_\lambda$，它被所有的 $L_\alpha$($\alpha\succ 0$，或只要 $\alpha\in\Delta$)零化. 这一概念当然依赖于 $\Delta$ 的选择. 例如，若 $L$ 是单纯的，$\beta$ 是 $\Phi$ 内关于 $\Delta$ 的最高根（引理 10.4A)，则 $L_\beta$ 的任一非零元素是关于 $L$ 的伴随表示的极大向量. 显然，它们是此时仅有的极大向量. 当 $\dim V=\infty$ 时，不一定存在极大向量. 反之，若 $\dim V<\infty$，则根据李定理，Borel 子代数(16.3)$B(\Delta)=H+\coprod_{\alpha\succ 0}L_\alpha$ 有一个公共特征向量（它被所有的 $L_\alpha$, $\alpha\succ 0$ 所零化)，它是上述意义下的极大向量.

为了研究有限维不可约 $L$-模，首先研究更大的一类 $L$-模，它们由一个极大向量所生成. 如果对一个（权 $\lambda$ 的）极大向量 $v^+$ 有 $V=\mathfrak{U}(L).v^+$，则简称 $V$ 是(权 $\lambda$)标准循环的，且称 $\lambda$ 是 $V$ 的首权. 描述这样一个模的结构是很容易的. 固定一个非零的 $x_\alpha\in L_\alpha(\alpha\succ 0)$，且选取(唯一地) $y_\alpha\in L_{-\alpha}$ 使 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$. 回忆一下，在半序"$\succ$"中，$\lambda\succ\mu$ 当且仅当 $\lambda-\mu$ 是正根之和($\lambda$, $\mu\in H^*$)，它是在 § 10 对欧氏空间 E 引入的，但对 $H^*$ 同样可定义. 下面定理的(b)说明把 $\lambda$ 称为"首权"是合理的.

**定理** 设 $V$ 是标准循环 $L$-模，有极大向量 $v^+\in V_\lambda$. 又设 $\Phi^+=\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$. 则

(a) $V$ 由向量 $y_{\beta_1}^{i_1}\cdots y_{\beta_m}^{i_m}.v^+$ ($i_j\in\mathbf{Z}^+$) 张成. 特别，$V$ 是它的权空间的直和.

(b) $V$ 的权都形如 $\mu=\lambda-\sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i$($k_i\in\mathbf{Z}^+$)，即所有的权都满

足 $\mu \prec \lambda$.

(c) 对每一个 $\mu \in H^*$, $\dim V_\mu < \infty$, 且 $\dim V_\lambda = 1$.

(d) $V$ 的每个子模都是它的权空间的直和.

(e) $V$ 是不可分解的 $L$-模, 具有唯一的极大(真)子模以及相应的唯一的不可约商模.

(f) $V$ 的每一个非零同态象也是权 $\lambda$ 的标准循环模.

**证** $L = N^- + B$, 这里 $N^- = \coprod_{\alpha \prec 0} L_\alpha$, 且 $B = B(\Delta)$. 据 PBW 定理(定理 17.3 的推论 C, D), 可以得出 $\mathfrak{U}(L).v^+ = \mathfrak{U}(N^-)\mathfrak{U}(B).v^+ = \mathfrak{U}(N^-).Fv^+$(因为 $v^+$ 是 $B$ 的公共特征向量). 现在 $\mathfrak{U}(N^-)$ 有一个由单项式 $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}$ 所构成的基, 故可得到 (a).

向量 $y_{\beta_1}^{i_1} \cdots y_{\beta_m}^{i_m}.v^+$ (*) 有权 $\lambda - \sum_j \lambda_j \beta_j$ (引理 20.1(a)). 把每一个 $\beta_j$ 改写成素根的非负 $\mathbf{Z}$-线性组合(如 § 10), 则即得到(b).

显然, 在(b)内只有有限多个向量(*)使 $\sum i_j \beta_j$ 等于预先给定的 $\sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$. 由于(a), 它们张成了权空间 $V_\mu$(此处 $\mu = \lambda - \sum k_i \alpha_i$). 此外, 具有权 $\mu = \lambda$ 的形如(*)的仅有的向量是 $v^+$, 故可得(c).

至于(d), 设 $W$ 是 $V$ 的子模, 且把 $w \in W$ 写成属于不同权的向量 $v_i \in V_{\mu_i}$ 之和. 在此必须证明所有的 $v_i$ 在 $W$ 内. 如果不是这样, 可选取使 $n$ 为最小($n > 1$)的 $w = v_1 + \cdots + v_n$, 这时没有一个 $v_i$ 属于 $W$. 找出使 $\mu_1(h) \neq \mu_2(h)$ 的 $h \in H$, 则 $h.w = \sum \mu_i(h) v_i$ 在 $W$ 内, 而且确实有 $(h - \mu_1(h).1).w = (\mu_2(h) - \mu_1(h)) v_2 + \cdots + (\mu_n(h) - \mu_1(h)) v_n \neq 0$. 根据 $w$ 的取法, 迫使 $v_2 \in W$, 这是荒谬的.

从(c), (d)可得出结论: $V$的每个真子模都落在除$V_\lambda$外的权空间之和内, 故所有这样的子模之和 $W$ 仍是真子模. 这就意味着 $V$ 有一个唯一的极大子模与唯一的不可约商模. 从而 $V$ 不可能是两个真子模之和, 这是因为它们都包含在 $W$ 内. 这样就得出了(e).

最后, $(f)$是显然的. ▌

**推论** 设 $V$ 与上述定理相同, 又假设 $V$ 是不可约 $L$-模. 则 $v^+$ 是 $V$ 内的唯一极大向量(容许相差非零纯量倍).

**证** 若 $w^+$ 是另一个极大向量，则 $\mathfrak{U}(L).w^+=V$(因为 $V$ 是不可约的). 所以上述定理可等价地应用于 $v^+$ 和 $w^+$. 若 $w^+$ 有权 $\lambda'$, 则 $\lambda'\prec\lambda$, $\lambda\prec\lambda'$(由(b)), 这就要求 $\lambda=\lambda'$. 故此时(据(e)) $w^+$ 与 $v^+$ 成比例. ▌

## 20.3. 存在与唯一定理

我们要证明对每一个 $\lambda\in H^*$ 存在一个且(在同构意义下)仅有一个首权 $\lambda$ 的不可约标准循环 $L$-模，它可能是无限维的. 唯一性部分的证明是不困难的(与证明定理 14.2 的论证相似，但没有那样复杂).

**定理 A** 设 $V, W$ 是首权 $\lambda$ 的标准循环模，若 $V, W$ 不可约，则它们同构.

**证** 构作 $L$-模 $X=V\oplus W$. 如果 $v^+$, $w^+$ 分别是 $V$, $W$ 内的权 $\lambda$ 的极大向量，令 $x^+=(v^+, w^+)\in X$, 则 $x^+$ 是权 $\lambda$ 的极大向量. 设 $Y$ 是由 $x^+$ 生成的 $X$ 的 $L$-子模($Y$ 是标准循环的)，且设 $p: Y\to V$, $p': Y\to W$ 是由 $X$ 到它的第一个与第二个因子的射影所诱导的映射. 显然 $p, p'$ 是 $L$-模同态. 由于 $p(x^+)=v^+$, $p'(x^+)=w^+$, 显然也有 $\operatorname{Im} p=V$, $\operatorname{Im} p'=W$. 作为标准循环模 $Y$ 的不可约商模，$V$ 和 $W$ 是同构的(据定理 20.2(e)). ▌

接下去我们考虑存在性问题. 把不可约性放在一边，剩下的问题是：如何构造标准循环模？有两种富有启发的构造方法，它们都可得出同样的结果.

首先看一个诱导模构造法(它类似于有限群表示理论中使用的技巧). 它是受到以下观察的启发：被看作为 $B$-模($B=B(\Delta)$)的标准循环模包含有由已给的极大向量所张成的一维子模. 因此，我们从一个一维向量空间 $D_\lambda$ 出发，它有一个基 $v^+$, 且用以下规则定义 $B$ 在 $D_\lambda$ 上的作用：$(h+\sum_{\alpha\succ 0}x_\alpha).v^+=h.v^+=\lambda(h)v^+$(对固定的 $\lambda\in H^*$). 读者很容易相信这使 $D_\lambda$ 成为一个 $B$-模. 当然，$D_\lambda$ 同样也是 $\mathfrak{U}(B)$ 模，所以，张量积 $Z(\lambda)=\mathfrak{U}(L)\otimes_{\mathfrak{U}(B)}D_\lambda$ 是有意义的，它在 $\mathfrak{U}(L)$ 的自然(左)作用下成为 $\mathfrak{U}(L)$-模.

我们断定$Z(\lambda)$是权$\lambda$的标准循环模. 一方面，$1\otimes v^+$显然生成$Z(\lambda)$. 另一方面，因为$\mathfrak{U}(L)$是一个自由$\mathfrak{U}(B)$模（定理17.3的推论D），它由1以及各单项式$y_{\beta_1}^{i_1}\cdots y_{\beta_m}^{i_m}$所生成，所以$1\otimes v^+$是非零的. 因此$1\otimes v^+$是权$\lambda$的极大向量，将它简称为$v^+$.

根据这样明显的构造方法，如果$N^-=\coprod_{\alpha\prec 0} L_\alpha$，则$Z(\lambda)$看作$\mathfrak{U}(N^-)$-模时，与$\mathfrak{U}(N^-)$本身同构. 更精确地说，$\mathfrak{U}(L)\cong\mathfrak{U}(N^-)\otimes\mathfrak{U}(B)$（PBW 定理），使得$Z(\lambda)\cong\mathfrak{U}(N^-)\otimes F$（作为左$\mathfrak{U}(N^-)$-模）.

也可用"生成元与关系式"来构造$Z(\lambda)$. 为此，就同前面一样，选取非零元素$x_\alpha\in L_\alpha$. $(\alpha\succ 0)$，且令$I(\lambda)$是$\mathfrak{U}(L)$内的左理想，它由所有的$x_\alpha(\alpha\succ 0)$以及$h_\alpha-\lambda(h_\alpha).1(\alpha\in\Phi)$所生成. 注意到$I(\lambda)$的这些生成元都零化$Z(\lambda)$的极大向量$v^+$，所以$I(\lambda)$也如此，且存在左$\mathfrak{U}(L)$-模的一个典范同态$\mathfrak{U}(L)/I(\lambda)\to Z(\lambda)$，它把1的陪集映到极大向量$v^+$上. 再一次使用$\mathfrak{U}(L)$的PBW基，我们看到这一映射把$\mathfrak{U}(B)$的陪集映到直线$Fv^+$上，所以这一映射是一一的，换句话说，$Z(\lambda)$同构于$\mathfrak{U}(L)/I(\lambda)$.

**定理 B** 设$\lambda\in H^*$，则存在权$\lambda$的一个不可约标准循环模$V(\lambda)$.

**证** （上面构造的）$Z(\lambda)$是权$\lambda$的标准循环，且有唯一的极大子模$Y(\lambda)$（定理20.2(d)）. 所以$V(\lambda)=Z(\lambda)/Y(\lambda)$是不可约的，且是权$\lambda$的标准循环（定理20.2(e)）. ▌

还剩下两个基本问题：(1)确定$V(\lambda)$中哪一些是有限维的. (2)对于这样的$V(\lambda)$，确定哪些权$\mu$出现，以及重数是多少. 下面几节就是解决这些问题的.

## 练　习

1. 如果$V$是任意的$L$-模，则它的权空间之和是直和.

2. (a) 如果$V$是不可约$L$-模，并且至少有一个（非零）权空间，证明$V$是它的权空间的直和；

(b) 设$V$是不可约$L$-模，则$V$有一个（非零）权空间当且仅当$\mathfrak{U}(H).v$对所有的$v\in V$是有限维的，或者当且仅当$\mathfrak{A}\cdot v$对所有的$v\in V$是有限维的

(这里 $\mathfrak{A}$＝由任意一个 $h\in H$ 在 $\mathfrak{U}(H)$ 内生成的带 1 子代数)；

(c) 设 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$，带有标准基 $(x, y, h)$. 证明 $1-x$ 在 $\mathfrak{U}(L)$ 内不可逆，从而在 $\mathfrak{U}(L)$ 的一个极大左理想 $I$ 内. 置 $V=\mathfrak{U}(L)/I$，则 $V$ 是不可约 $L$-模. 利用如下事实:

$$(x-1)^r h^s \equiv \begin{cases} 0 \pmod I & r>s \\ (-2)^r r!.1 \pmod I & r=s \end{cases}$$

证明 $1, h, h^2, \cdots$ 的象在 $V$ 内线性无关的(因而 $\dim V=\infty$). 从而得出结论: $V$ 没有(非零)权空间.

3. 叙述 (1.2) 内的型 $\mathrm{A}_l \sim \mathrm{D}_l$ 的线性李代数的自然表示的权与极大向量.

4. 设 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$, $\lambda\in H^*$. 证明在练习 7.7 内对于 $\lambda=\lambda(h)$ 所构造的模 $Z(\lambda)$ 同构于 (20.3) 构造的模 $Z(\lambda)$. 从而推断出: $\dim V(\lambda)<\infty$ 当且仅当 $\lambda(h)$ 是非负整数.

5. 若 $\mu\in H^*$，定义 $\mathscr{P}(\mu)$ 为使得 $\mu=\sum_{\alpha\succ 0} k_\alpha \alpha$ 的非负整数 $k_\alpha$ $(\alpha\succ 0)$ 的各个不同组合的个数. 通过描述 $Z(\lambda)_\mu$ 的基以证明 $\dim Z(\lambda)_\mu=\mathscr{P}(\lambda-\mu)$.

6. 证明在(20.3)内引入的左理想已经由元素 $x_\alpha$, $h_\alpha-\lambda(h_\alpha).1$ ($\alpha$ 是素根)所生成.

7. 不用(20.3)内的诱导模构造法，证明 $I(\lambda)\cap\mathfrak{U}(N^-)=0$，特别地，$I(\lambda)$ 真正包含于 $\mathfrak{U}(L)$ 内. [证明在 $\mathfrak{U}(B)$ 内的类似的左理想 $I'(\lambda)$ 是真左理想，而由 PBW 定理，$I(\lambda)=\mathfrak{U}(N^{-1})I'(\lambda)$.]

8. 对于每一个正整数 $d$，证明维数 $\leqslant d$ 的不同的不可约 $L$-模 $V(\lambda)$ 的个数是有限的. 从而得出: 维数 $\leqslant d$ 的不同构 $L$-模的个数是有限的. [若 $\dim V(\lambda)<\infty$，把 $V(\lambda)$ 看作为 $S_\alpha$-模(对每一个 $\alpha\succ 0$). 注意到 $\lambda(h_\alpha)\in\mathbf{Z}$，且 $V(\lambda)$ 包含一个 $\lambda(h_\alpha)+1$ 维的 $S_\alpha$-子模.]

9. 验证以下关于 $Z(\lambda)$(20.3)唯一极大子模 $Y(\lambda)$ 的描述: 若 $v\in Z(\lambda)_\mu$，$\lambda-\mu=\sum_{\alpha\succ 0} c_\alpha\alpha$ $(c_\alpha\in\mathbf{Z}^+)$，注意到 $\prod_{\alpha\succ 0} x_\alpha^{c_\alpha}.v$ 有权 $\lambda$ (把正根按任一个固定次序排列)，从而它是极大向量 $v^+$ 的纯量倍. 如果对 $c_\alpha$ 的每一种可能的选择(见练习 5)，这一倍数是 0，证明 $v\in Y(\lambda)$。反之，证明 $Y(\lambda)$ 是由关于权 $\mu\neq\lambda$ 的所有这样的权向量 $v$ 所张成.

10. $Z(\lambda)$ 内权 $\mu$ 的一个极大向量 $w^+$ 诱导了一个 $L$-模同态 $\phi$: $Z(\mu)\to Z(\lambda)$，且 $\mathrm{Im}\,\phi$ 是由 $w^+$ 生成的子模. 证明: $\phi$ 是内射的.

11. 设 $V$ 是任意的有限维 $L$-模，$\lambda\in H^*$. 在 $L$-模 $W=Z(\lambda)\otimes V$ 内构造一个子模链 $W=W_1\supset W_2\supset\cdots\supset W_{n+1}=0$ $(n=\dim V)$ 使得 $W_i/W_{i+1}$ 同

构于$Z(\lambda+\lambda_i)$. 这里把$V$的权排成适当次序是$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$(重数考虑在内).

【附注】

Lemire[1]研究了无限维模内的权空间的存在性问题, 练习2是属于他的. 模$Z(\lambda)$由Verma[1]作了详细探索, 更近一些, 由Bernstein, Gel'fand, Gel'fand[1], [2]作了研究。Verma特别证明了$L$-同态$Z(\mu)\to Z(\lambda)$的空间或者是0, 或者是在F上1维的, 并得到了第二种情形的充分条件, 而后面的几个作者则证明了这一条件的必要性. 见Dixmier[1], 第7章.

## 21. 有限维模

### 21.1. 有限维的必要条件

假设$V$是有限维不可约$L$-模, 则$V$至少有一个极大向量, 属于唯一确定的权$\lambda$, 且它生成的子模必定就是整个$V$(由于不可约性). 所以$V$同构于$V(\lambda)$((20.3)的定理A和B).

对每一个素根$\alpha_i$, 设$S_i(=S_{\alpha_i})$是$\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$在$L$内的同构象. 则$V(\lambda)$也是(有限维)$S_i$模, 且关于$L$的极大向量也是关于$S_i$的极大向量. 特别是, 因为存在权$\lambda$的极大向量, 则它关于CSA$H_i\subset S_i$的权被纯量$\lambda(h_i)(h_i=h_{\alpha_i})$所完全确定. 但根据定理7.2, 迫使$\lambda(h_i)$是一个非负整数. 这就证明了:

**定理** 如果$V$是首权$\lambda$的有限维不可约$L$-模, 则$\lambda(h_i)$是一个非负整数$(1\leqslant i\leqslant l)$. ∎

更一般地, 从(7.2)可以推导出, 如果$V$是任一有限维$L$-模, $\mu$是$V$的权, 则$\mu(h_i)=\langle\mu, \alpha_i\rangle\in\mathbf{Z}(1\leqslant i\leqslant l)$. 因此, 出现在有限维模中的权也是§13中所阐述的抽象意义下的"权", 从而那里所证明的结果今后都可以用. 请注意, 使用§13的语言, $V(\lambda)$的首权$\lambda$(当$\dim V<\infty$时)是支配的. 为了避免歧义, 我们将继续把$H^*$的任一元素称为一个权, 而把所有的$\lambda(h_i)$(从而所有的$\lambda(h_\alpha)$)都是整数的线性函数$\lambda$称为**整线性函数**. 如果所有的$\lambda(h_i)$都是非负整数, 则称$\lambda$为**支配整线性函数**. 所有整线性函数的集合$\Lambda$是$H^*$内的一个格(或等价地, 是由所有根生成的实欧氏空间内的一个格). 同§13一样, 把支配整线性函数的集合记为$\Lambda^+$.

再引入一个记号：若 $V$ 是 $L$-模，则令 $\Pi(V)$ 表示它的一切权的集合．若 $V=V(\lambda)$，则记为 $\Pi(\lambda)$．

## 21.2．有限维的充分条件

**定理** 如果 $\lambda\in H^*$ 是支配整的，则不可约 $L$-模 $V=V(\lambda)$ 是有限维的，且它的权集合 $\Pi(\lambda)$ 被 $\mathscr{W}$ 所置换，使得对于 $\sigma\in\mathscr{W}$，有 $\dim V_\mu=\dim V_{\sigma\mu}$．

**推论** 映射 $\lambda\mapsto V(\lambda)$ 在 $\Lambda^+$ 以及有限维不可约 $L$-模的同构类之间诱导了一个一一对应．

**推论的证明** 从上述定理，再由于定理 21.1 以及(20.3)的定理 A, B, 即可得出．▮

**定理的证明** 首先写下关于 $\mathfrak{U}(L)$ 内的换位子的一些信息．取定一组 $L$ 的标准生成元 $\{x_i, y_i\}$．先证明一个引理．

**引理** 在 $\mathfrak{U}(L)$ 内有以下恒等式：对于 $k\geqslant0$, $1\leqslant i, j\leqslant l$：

(a) $[x_j, y_i^{k+1}]=0$ 当 $i\neq j$；

(b) $[h_j, y_i^{k+1}]=-(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$；

(c) $[x_i, y_i^{k+1}]=-(k+1)y_i^k(k\cdot1-h_i)$．

**证** (a) 从以下事实(引理 10.1)即可得出：当 $i\neq j$ 时，$\alpha_j-\alpha_i$ 不是根．

(b) 对 $k$ 使用归纳法．当 $k=0$ 时，$[h_j, y_i]=-\alpha_i(h_j)y_i$（见(18.1)）．一般地，左边等于：

$$\begin{aligned}h_jy_i^{k+1}-y_i^{k+1}h_j&=(h_jy_i^k-y_i^kh_j)y_i+y_i^k(h_jy_i-y_ih_j)\\&=-k\alpha_i(h_j)y_i^ky_i+y_i^k(-\alpha_i(h_j)y_i)\\&=-(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1},\end{aligned}$$

在倒数第二步时使用归纳假设．

(c) 写出

$$\begin{aligned}[x_i, y_i^{k+1}]&=x_iy_i^{k+1}-y_i^{k+1}x_i=[x_i, y_i]y_i^k+y_i[x_i, y_i^k]\\&=h_iy_i^k+y_i[x_i, y_i^k],\end{aligned}$$

再对 $k$ 使用归纳法，且运用公式(b)即可(用 $k$ 代 $k+1$)推得．▮

对定理的证明分步进行．它的思路是：证明 $V$ 的权集合被 $\mathscr{W}$

所置换，从而是有限的(见定理 18.3 的证明)．为方便起见，把 $V$ 所提供的 $L$ 的表示记为 $\phi: L\to \mathrm{gl}(V)$．固定 $V$ 的(权 $\lambda$ 的)极大向量 $v^+$，且置 $m_i=\lambda(h_i)$，$1\leqslant i\leqslant l$．由假设，$m_i$ 是非负整数．

(1) $y_i^{m_i+1}.v^+=0$．设 $w=y_i^{m_i+1}.v^+$，据引理的(a)，当 $i\neq j$ 时，$x_j.w=0$．另一方面，引理的(b)和(c)说明了

$$x_i y_i^{m_i+1}.v^+=y_i^{m_i+1}x_i.v^+-(m_i+1)y_i^{m_i}.(m_i v^+-m_i v^+)=0,$$

所以 $x_i.w=0$．如果 $w$ 非零，它将是 $V$ 内权 $\lambda-(m_i+1)\alpha_i\neq\lambda$ 的极大向量，与推论 20.2 矛盾．

(2) 对于 $1\leqslant i\leqslant l$，$V$ 包含一个非零有限维 $S_i$-模．由 $v^+$，$y_i.v^+$，$y_i^2.v^+$，…，$y_i^{m_i}.v^+$ 所张成的子空间在 $y_i$ 下不变(根据(1))．由于这些向量中的每一个都属于 $V$ 的一个权空间，所以它们在 $h_i$ 下也不变，因此根据引理的(c)(以及对上标 $k$ 作归纳法)，它们在 $x_i$ 下不变．

(3) $V$ 是有限维 $S_i$-子模之和．如果 $V'$ 表示 $V$ 的所有这样的子模之和，则由(2)，$V'$ 是非零的．另一方面，设 $W$ 是 $V$ 的任一有限维 $S_i$-子模，由所有子空间 $x_\alpha W$ $(\alpha\in\Phi)$ 所张成的子空间显然是有限维的，也是 $S_i$ 不变的．所以 $V'$ 在 $L$ 下是不变的，且因 $V$ 是不可约的，故 $V'=V$．

(4) 对 $1\leqslant i\leqslant l$，$\phi(x_i)$ 和 $\phi(y_i)$ 是 $V$ 的局部幂零自同态(见(18.3))．事实上，若 $v\in V$，则由(3)，$v$ 落在有限维 $S_i$-子模的有限和之内(所以在一个有限维 $S_i$-子模内)．在这样一个模上，$\phi(x_i)$ 和 $\phi(y_i)$ 是幂零的(见(6.4))．

(5) $S_i=\exp\phi(x_i)\exp\phi(-y_i)\exp\phi(x_i)$ 是 $V$ 的一个完全确定的自同构．这可从(4)推得(也参见(18.3))．

(6) 如果 $\mu$ 是 $V$ 的任一权，则 $S_i(V_\mu)=V_{\sigma_i\mu}$ ($\sigma_i$=关于 $\alpha_i$ 的反射)．$V_\mu$ 位于有限维 $S_i$ 子模 $V'$ 之内(见(3))，且 $S_i|_{V'}$ 与(7.2)所构造的自同构 $\tau$ 相同．从(7.2)的讨论立即可得到上述结论．

(7) 权集 $\Pi(\lambda)$ 在 $\mathscr{W}$ 下不变，且 $\dim V_\mu=\dim V_{\sigma\mu}$ ($\mu\in\Pi(\lambda)$，$\sigma\in\mathscr{W}$)．因为 $\mathscr{W}$ 由 $\sigma_1$，…，$\sigma_l$ 所生成(定理 10.3(d))，这从(6)即可得出．

(8) $\Pi(\lambda)$是有限的. 从引理 13.2B 可清楚地知道，所有支配整线性函数 $\mu\prec\lambda$ 的 $\mathscr{W}$ 共轭元的集合是有限的. 但由于定理 20.2 以及(7)，可知 $\Pi(\lambda)$包含在此集合之中.

(9) $\dim V$ 是有限的. 从定理 20.2(c) 可知，对所有的 $\mu\in\Pi(\lambda)$，$\dim V_\mu$ 是有限的. 再结合(8)，就证明了我们的论断. ▮

## 21.3. 权链与权图

这里的讨论仍限于在有限维的情形，$V=V(\lambda)$，$\lambda\in\Lambda^+$. 设 $\mu\in\Pi(\lambda)$，$\alpha\in\Phi$. 引理 20.1 说明了由所有权空间 $V_{\mu+i\alpha}(i\in\mathbf{Z})$张成的 $V$ 的子空间 $W$ 在 $S_\alpha$ 下不变. 根据(7.2)以及关于完全可约性的 Weyl 定理，$\Pi(\lambda)$内形如 $\mu+i\alpha$ 的权必定组成一个连接的链)即经过 $\mu$ 的 $\alpha$ 链，它推广了伴随表示中的经过 $\beta$ 的 $\alpha$ 根链). 此外，反射 $\sigma_\alpha$ 使此链倒转. 如果链由 $\mu-r\alpha$, $\cdots$, $\mu$, $\cdots$, $\mu+q\alpha$ 组成，则 $r-q=\langle\mu, \alpha\rangle$. 根据(13.4)，这证明了以下的结果:

**命题** 如果 $\lambda\in\Lambda^+$，则集合 $\Pi(\lambda)$是在 (13.4) 的意义下饱和的. 特别地，使 $\mu\in\Lambda$ 属于 $\Pi(\lambda)$ 的充分必要条件是 $\mu$ 及其 $\mathscr{W}$-共轭都$\prec\lambda$. ▮

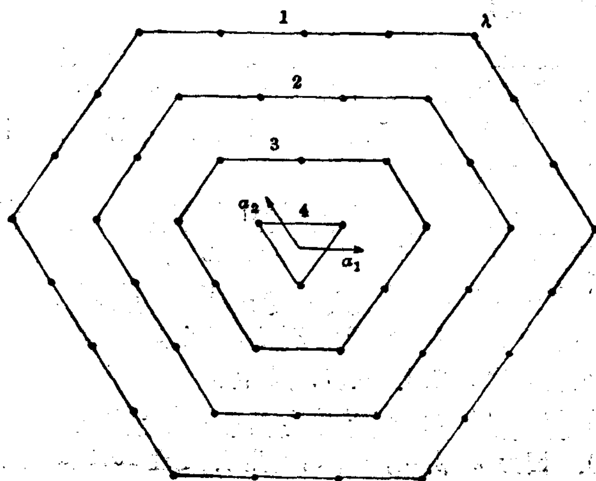



图 1

当 rank $\Phi\leqslant 2$ 时，如果画一个权图，这一切结果都容易被形象化了. 例如，若 $L=\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$（型 $\mathsf{A}_2$），具有基本支配整线性函数(13.2) $\lambda_1$, $\lambda_2$. 若 $\lambda=4\lambda_1+3\lambda_2$, $V(\lambda)$ 的权图在图 1 给出. 黑点表示所出现的权. 这一情形下的重数也被标出，它从 1 增加到 4（从外面的"壳层"向里面的"壳层"过渡时，重数 $\dim V_\mu$ 总是增加 1，直至壳层变成三角形为止，此时重数不再增加）. 这些重数的简单变化情况是关于型 $\mathsf{A}_2$ 的特殊现象（Antoine, Speiser[1]）. 对于其它根系，情况可能更复杂. 关于重数的更详尽的讨论可见 § 22.

## 21.4. $V(\lambda)$的生成元与关系式

当 $\lambda$ 是支配整的时，可以更精确地描述从 $Z(\lambda)$ 到它的同态象 $V(\lambda)$ 的过渡. 这在本书的其余部分并不用到，但有它独立的意义. 在此将再次使用定理 21.2 中的一些证明.

从(20.3)回想起 $Z(\lambda)$ 同构于 $\mathfrak{U}(L)/I(\lambda)$，这里 $I(\lambda)$ 是 $\mathfrak{U}(L)$ 的左理想，它由所有的 $x_\alpha(\alpha\succ 0)$ 以及 $h_\alpha-\lambda(h_\alpha)\cdot 1(\alpha\in\Phi)$ 所生成. 与此等价地，$I(\lambda)$ 是 $Z(\lambda)$ 内极大向量的零化子. 现在固定一个支配整线性函数 $\lambda$，且设 $J(\lambda)$ 是 $\mathfrak{U}(L)$ 内的左理想，它零化 $V(\lambda)$ 的极大向量. 包含关系 $I(\lambda)\subset J(\lambda)$ 诱导出一个典范映射 $Z(\lambda)=\mathfrak{U}(L)/I(\lambda)\to V(\lambda)\cong\mathfrak{U}(L)/J(\lambda)$. 从定理 21.2 的证明我们回想起 $y_i^{m_i+1}\in J(\lambda)$, $1\leqslant i\leqslant l$, 其中 $m_i=\langle\lambda, \alpha_i\rangle$.

**定理** 设 $\lambda\in\Lambda^+$, $m_i=\langle\lambda, \alpha_i\rangle(1\leqslant i\leqslant l)$. 则 $J(\lambda)$ 是由 $I(\lambda)$ 以及所有 $y_i^{m_i+1}(1\leqslant i\leqslant l)$ 所生成.

**证** 先假定能证明 $V'(\lambda)=\mathfrak{U}(L)/J'(\lambda)$ 是有限维的，这里的 $J'(\lambda)$ 是一个左理想，它由 $I(\lambda)$ 以及所有的 $y_i^{m_i+1}$ 生成. 因为 $V'(\lambda)$ 是标准循环的（或者是 0），它必须是不可约的（或者 0）（定理 20.2(d)，以及关于完全可约性的 Weyl 定理）. 但 $J'(\lambda)\subset J(\lambda)$ 意味着 $V(\lambda)$ 是 $V'(\lambda)$ 的同态象，迫使 $V'(\lambda)\cong V(\lambda)$，所以 $J'(\lambda)=J(\lambda)$，正是所要证的.

为了证明 $V'(\lambda)$ 是有限维的，只要说明它是有限维 $S_i$-子模 $(1\leqslant i\leqslant l)$ 之和即可，因为此时定理 21.2 的证明可与前述同样地

进行下去. 为此, 只要证明每一个 $y_i$ 在 $V'(\lambda)$ 上局部幂零就够了(这对于 $x_i$ 来说是显然的, 因为不可能对所有的 $k\geqslant 0$ 都有 $\mu+k\alpha_i\prec\lambda$). 而根据假设, $V'(\lambda)$ 内的 1 的陪集被 $y_i$ 的一个适当的幂(譬如说, $m_i+1$)所零化. 我们知道(由定理 20.2), $V'(\lambda)$ 是由所有的 $y_{i_1}\cdots y_{i_t}(1\leqslant i_j\leqslant l)$ 的陪集所张成. 下面的引理意味着: 如果这一单项式的陪集被 $y_i^k$ 零化 (即映入 $J'(\lambda)$), 则更长的单项式 $y_{i_1}y_{i_1}\cdots y_{i_t}$ 的陪集被 $y_i^{k+3}$ 所零化. 从 1 出发, 对于每个单项式的长度施行归纳法, 就可证明 $y_i$ 的局部幂零性.

**引理** 设 $\mathfrak{A}$ 是 F 上的结合代数, $y, z\in\mathfrak{A}$. 则 $[y^k, z]=\binom{k}{1}[y, z]y^{k-1}+\binom{k}{2}[y, [y,z]]y^{k-2}+\cdots+[y, [y\cdots[y,z]\cdots]\cdots]$.

**证** 对 $k$ 使用归纳法. $k=1$ 的情形就是恒等式 $[y, z]=[y, z]$. 归纳法证明的步骤是容易写出的, 留给读者去完成. ▌

应用这一引理, 把 $\mathfrak{A}$ 取成 $\mathfrak{U}(L)$, 并取 $y, z$ 为属于两个负根的根向量. 我们知道 $(\operatorname{ad} y)^4(z)=0$, 这是因为根链的长度至多为 4, 所以定理中所得到的恒等式可约化为:

$$[y^k, z]=k[y, z]y^{k-1}+\binom{k}{2}[y, [y,z]]y^{k-2}$$

$$+\binom{k}{3}[y, [y, [y, z]]]y^{k-3}. ▌$$

## 练　习

1. 读者可以检查, 我们并没有使用 $\mathscr{W}$ 在 $\Phi$ 的基上的单可迁性(定理 10.3l(e)), 而只是用了可迁性. 使用表示理论以得出一个新的证明, 可如下进行: 存在一个有限维不可约模 $V(\lambda)$, 关于它, 所有的 $\langle\lambda, \alpha\rangle(\alpha\in\Delta)$ 是不同的, 且是正的. 若 $\sigma\in\mathscr{W}$ 置换了 $\Delta$, 则 $\sigma\lambda=\lambda$, 迫使 $\sigma=1$.

2. 对 $B_2$, $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$(照第三章的记号), 画出权图.

3. 设 $\lambda\in\Lambda^+$. 证明 0 可作为 $V(\lambda)$ 的权, 当且仅当 $\lambda$ 是根的和.

4. 回想(20.3)中构作的模 $Z(\lambda)$. 当 $\lambda\in\Lambda$ 时, 使用引理 21.2 以找出 $Z(\lambda)$ 内的某些极大向量: $y_i^{m_i+1}(m_i=\langle\lambda, \alpha_i\rangle)$ 的陪集是一个极大向量, 只要 $m_i$ 是非负的(参看练习 7.7).

5. 设 $V$ 是一一的有限维 $L$-模, $\Lambda(V)$ 是由 $V$ 的权生成的 $\Lambda$ 的子群. 则

$\Lambda(V)\supset\Lambda_r$. 证明 $\Lambda$ 的每一个包含 $\Lambda_r$ 的子群是属于这种类型的.

6. 若 $V=V(\lambda),\lambda\in\Lambda^+$, 证明 $V^*$ 同构于 $V(-\sigma\lambda)$(作为 $L$-模), 这里的 $\sigma\in\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{W}$ 的把 $\Delta$ 变成 $-\Delta$ 的唯一的元素(练习 10.9, 参看练习 13.5).

7. 设 $V=V(\lambda)$, $W=V(\mu)$, $\lambda$, $\mu\in\Lambda^+$. 证明 $\Pi(V\otimes W)=\{\nu+\nu'|\nu\in\Pi(\lambda),\ \nu'\in\Pi(\mu)\}$, 且 $\dim(V\otimes W)_{\nu+\nu'}$ 等于

$$\sum_{\pi+\pi'=\nu+\nu'}\dim V_\pi\cdot\dim W_{\pi'}.$$

又, $\lambda+\mu$ 的重数是 1, 所以在 $V\otimes W$ 的直和分解中, $V(\lambda+\mu)$ 恰好出现一次.

8. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$ 是关于 $L$ 的根系 $\Phi$ 的基本支配权(13.1). 说明怎样构作一个任意的 $V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$, 使它作为模 $V(\lambda_1),\cdots,V(\lambda_l)$的一个适当的张量积(允许重复)的直和分解中的加项.

9. 证明引理 21.4, 且由此推导出引理 21.2.

10. 设 $L=\mathfrak{sl}(l+1,\mathsf{F})$, CSA $H=\mathfrak{d}(l+1,\mathsf{F})\cap L$. 令 $\mu_1,\cdots,\mu_{l+1}$ 是 $H$ 关于 $\mathfrak{gl}(l+1,\mathsf{F})$的标准基的坐标函数. 则 $\sum\mu_i=0$, 且 $\mu_1,\cdots,\mu_l$ 构成 $H^*$ 的一个基, 而 $\alpha_i=\mu_i-\mu_{i+1}(1\leqslant i\leqslant l)$的集合是根系 $\Phi$ 的一个基 $\Delta$. 验证: $\mathscr{W}$ 作用在 $H^*$ 上是对 $\mu_i$ 作置换, 作为其特例, 关于 $\alpha_i$ 的反射交换了 $\mu_i$, $\mu_{i+1}$, 且使其余的 $\mu_j$ 不变. 然后证明关于 $\Delta$ 的基本支配权是 $\lambda_k=\mu_1+\cdots+\mu_k(1\leqslant k\leqslant l)$.

11. 设 $V=\mathsf{F}^{l+1}$, $L=\mathfrak{sl}(V)$. 如同练习 10 一样, 取定 CSA $H$ 以及 $\Phi$ 的基 $\Delta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$. 本练习的目的是构作首权 $\lambda_k$ 的不可约 $L$-模 $V_k(1\leqslant k\leqslant l)$.

(a) 对 $k=1$, $V_1=V$ 是首权 $\lambda_1$ 的不可约模;

(b) 在 $k$ 重张量积 $V\otimes\cdots\otimes V(k\geqslant2)$内规定 $V_k$ 为斜对称张量的子空间: 若$(v_1,\cdots,v_{l+1})$是 $V$ 的典范基, $V_k$ 具有一个由$\binom{l+1}{k}$个向量

$$[v_{i_1},\cdots,v_{i_k}]=\sum_{\pi\in\mathscr{S}_k}\mathrm{sn}(\pi)v_\pi(i_1)\otimes\cdots\otimes v_\pi(i_k)\qquad(*)$$

所组成的基, 其中 $i_1<i_2<\cdots<i_k$. 证明(*)的权是 $\mu_{i_1}+\cdots+\mu_{i_k}$;

(c) 证明 $L$ 使子空间 $V_k$ 不变, 且所有的权 $\mu_{i_1}+\cdots+\mu_{i_k}(i_1<\cdots<i_k)$是不同的, 在 $\mathscr{W}$ 下共轭. 结论是: $V_k$ 是不可约的, 首权为 $\lambda_k$. (见练习 13.13.)

**【附注】**

定理 21.4 是或多或少为大家所知道的. 处理方法是以 Verma[1] 论文的附录为基础的. 参看 Harish-Chandra[1]. $A_2$ 的权图出现在 Antoine, Speiser[1]; 也可见 Kolman, Belinfante[1]及 Samelson[1].

## 22. 重数公式

本节内所考虑的模都是有限维的.

如果 $\mu\in H^*$ 是一个整线性函数，定义在 $V(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda^+)$ 内 $\mu$ 的重数是 $m_\lambda(\mu)=\dim V(\lambda)_\mu$ $(=0$，当 $\mu$ 不是 $V(\lambda)$ 的权时$)$. 当 $\lambda$ 固定时，简记为 $m(\mu)$. 我们的目的是通过计算 $V(\lambda)_\mu$ 上的 Casimir 型元素的迹以推导出 $m_\lambda(\mu)$ 的 Freudenthal 递推公式. 利用这一元素作用在 $V(\lambda)$ 上，相当于一个非零纯量. 根据这一事实，我们可得到 $\dim V(\lambda)_\mu$.

### 22.1. 普遍 Casimir 元素

回忆一下 (6.2) 中 $L$ 的一个表示的 Casimir 元素 $C_\phi$ 的概念，它是被用来证明完全可约性的 Weyl 定理的. 现在，可用 $\mathfrak{U}(L)$ 来作出"普遍"的构造.

从 $L$ 的伴随表示开始讨论，它的迹型正是 Killing 型 $\kappa$. 从 § 8 很容易引导出关于 $\kappa$ 的对偶基的自然构造法. 如果 $\alpha$, $\beta$ 是 $H$ 上的任意线性函数，我们知道 $L_\alpha$ 正交于 $L_\beta$，除非 $\beta=-\alpha$ (命题 8.1). 我们又知道 $\kappa$ 对于 $H$ 的限制是非退化的，因此可如下进行工作：选取 $H$ 的任一基，譬如说 (关于 $\Delta$ 的) 标准基 $(h_1, \cdots, h_l)$，且设 $(k_1, \cdots, k_l)$ 是 $H$ 关于 $\kappa$ 对 $H$ 的限制的对偶基. 然后在每个 $L_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 内选取一个非零的 $x_\alpha$，且设 $z_\alpha$ 是 $L_{-\alpha}$ 内满足 $\kappa(x_\alpha, z_\alpha)=1$ 的 (唯一的) 元素. 由上述，基 $(h_i, 1\leqslant i\leqslant l; x_\alpha, \alpha\in\Phi)$ 与 $(k_i, 1\leqslant i\leqslant l; z_\alpha, \alpha\in\Phi)$ 关于 $\kappa$ 是对偶的. 不过要提醒一句：不要把元素 $x_\alpha$, $z_\alpha$ 与我们对 $x_\alpha$, $y_\alpha$ 的习惯取法(使 $[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$)相混淆. 在这里是 $[x_\alpha z_\alpha]=t_\alpha=[(\alpha, \alpha)/2]h_\alpha$(命题 8.3(c)).

根据定义，关于 ad 的 Casimir 元素是 $L$ 的一个自同态，它由 $c_{\mathrm{ad}}=\sum_{i=1}^{l}\operatorname{ad}h_i\operatorname{ad}k_i+\sum_{\alpha\in\Phi}\operatorname{ad}x_\alpha\operatorname{ad}z_\alpha$ 所给出. 这一构造法可能启发读者会考虑元素 $c_L=\sum_{i=1}^{l}h_ik_i+\sum_{\alpha\in\Phi}x_\alpha z_\alpha\in\mathfrak{U}(L)$. 如果 ad 被(唯一地)扩张为结合代数的一个同态：ad: $\mathfrak{U}(L)\to\operatorname{End}L$，则 $\operatorname{ad}c_L$ 不是别

的，正是 $c_{ad}$. 由于这个道理，我们称 $c_L$ 为 $L$ 的普遍 Casimir 元素. 不难看出，$c_L$ 与 $L$ 的基的取法无关(练习 2). (6.2)里的论证说明了，对 $L$ 的任一表示 $\phi$，$\phi(c_L)$ 与 $\phi(L)$ 是可交换的，所以若 $\phi$ 不可约时，它的作用相当于一个纯量.

让我们探究一下 $\phi(c_L)$ 与 Casimir 元素 $c_\phi$ 间有怎样的联系. 当 $L$ 为单纯时，是容易看出的，所以首先研究 $L$ 为单纯的情况(见练习 6.6).

**引理** 设 $L$ 是单纯李代数. 如果 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 是 $L$ 上的非退化对称结合双线性型，则存在一个非零纯量 $a$，使得 $f(x,y)=ag(x, y)$ 对所有的 $x, y\in L$ 成立.

**证** 每个(非退化的)双线性型可通过对应 $x\mapsto s$，其中 $s(y)=f(x, y)$ 或 $g(x, y)$ 建立从 $L$ 到 $L^*$ 上的一个向量空间自然同构. 结合性保证了它们是 $L$-模同构(回忆(6.1)，$L^*$ 如何作成一个 $L$-模). 把其中一个映射与另一个映射的逆映射复合起来，就建立了 $L$-模同构 $\pi: L\to L$. 但 $L$ 是不可约的 $L$ 模(因它是单纯的)，故由 Schur 引理，$\pi$ 是一个纯量乘法. 换句话说，我们有 $0\neq a\in F$，使得若 $f(x, y)=g(z, y)$ (对所有 $y\in L$)，则 $z=ax$. ∎

设 $\phi: L\to \mathfrak{gl}(V)$ 是 $L$ 的表示，$L$ 是单纯的. 如果 $\phi(L)=0$，则一切都很清楚. 否则，$\phi$ 是一一的(因为 $\text{Ker}\,\phi$ 是 $L$ 的理想)，故型 $f(x, y)=Tr(\phi(x)\phi(y))$ 在 $L$ 上非退化，又是结合的. 而 Killing 型具有同样性质，所以它必定是非零倍 $af$ (由引理). 特别是当给出了 $L$ 的一个基后，关于 $\kappa$ 的对偶基可以用 $1/a$ 去乘关于 $f$ 的对偶基向量而得到. 这就证明了 $\phi(c_L)=(1/a)c_\phi$. 用语言表达：$\phi$ 的通常 Casimir 元素是普遍 Casimir 元素的象的非零倍.

最后，设 $L$ 是半单纯的. 在(5.2)中我们看到，$L$ 的各个单纯理想是关于 $\kappa$ 互相正交的，于是上面选取的对偶基可以取成 $L$ 的各个单纯分量中的类似对偶基(相对于各分量的 Killing 型，它们可由限制 $\kappa$ 而得到)的并集. 从而 $c_L=c_{L_1}+\cdots+c_{L_t}(L=L_1\oplus\cdots\oplus L_t)$，且若 $\phi$ 是 $L$ 的表示，则每一 $\phi(c_{L_i})$ 与相应的 $c_{\phi_i}(\phi_i=\phi|_{L_i})$ 成比例，对每一 $i$ 来说这里的 $\phi_i$ 或者是平凡的，或者是一一的. 所以 $\phi(c_L)$

仍然与$e_i$密切相关，虽然不一定成比例．并且这也证明了$\phi(c_L)$与$\phi(L)$可交换．当$\phi$为不可约时，与$\phi(c_L)$的作用相当的纯量的精确值将在后面被确定．

## 22.2．权空间上的迹

取定一个不可约$L$模$V=V(\lambda)$，$\lambda\in\Lambda^+$，且用$\phi$代表它所提供的表示．再固定(22.1)中所选取的$L$关于$\kappa$的对偶基．在这一小节里要对$V$的每一个权$\mu$计算自同态$\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$在$V_\mu$上的迹．它是有意义的，因为$\phi(z_\alpha)$把$V_\mu$映入$V_{\mu-\alpha}$，然后$\phi(x_\alpha)$又把$V_{\mu-\alpha}$映回$V_\mu$．

因为我们只用到一个根$\alpha$，故而可利用$S_\alpha$的表示理论(§7)．不过要作一些改变，因为基$(x_\alpha, z_\alpha, t_\alpha)$不是标准的，它与标准基$(x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha)$的关系是：$z_\alpha=[(\alpha, \alpha)/2]y_\alpha$，$t_\alpha=[(\alpha, \alpha)/2]h_\alpha$．设$(v_0, v_1, \cdots, v_m)$是关于首权$m$的不可约$S_\alpha$-模的基，即引理7.2的公式(a)～(c)中使用的基．为了更方便起见，把上述基换成$(w_0, \cdots, w_m)(w_i=i![(\alpha, \alpha)^i/2^i]v_i)$．经过这一代换后，可得：

(a′) $t_\alpha.w_i=(m-2i)[(\alpha, \alpha)/2]w_i$;

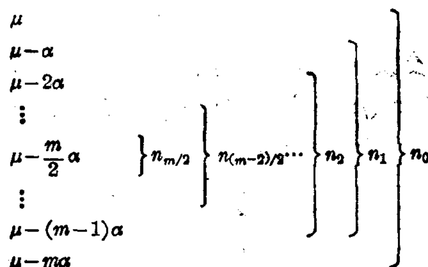
(b′) $z_\alpha.w_i=w_{i+1}$, $(w_{m+1}=0)$;

(c′) $x_\alpha.w_i=i(m-i+1)[(\alpha, \alpha)/2]w_{i-1}$, $(w_{-1}=0)$,

所以

$$x_\alpha z_\alpha.w_i=(m-i)(i+1)[(\alpha, \alpha)/2]w_i. \tag{1}$$

现在设$\mu$是$V$的权，它使得$\mu+\alpha$不是权．则(21.3)的经过$\mu$的$\alpha$权链为$\mu, \mu-\alpha, \cdots, \mu-m\alpha$，其中$m=\langle\mu, \alpha\rangle$．在以下的讨论中，保持$\mu, \alpha, m$不变．$S_\alpha$在权空间的和$W=V_\mu+V_{\mu-\alpha}+\cdots+V_{\mu-m\alpha}$上的表示是不可约表示的直和(Weyl 定理)，每一个不可约表示都涉及一个在$\sigma_\alpha$下不变的权链．更精确地说，用$n_i(0\leqslant i\leqslant[m/2])$记述首权为$(\mu-i\alpha)(h_\alpha)$的不可约加项的个数．则$m(\mu-i\alpha)=n_0+\cdots+n_i$，因而$n_i=m(\mu-i\alpha)-m(\mu-(i-1)\alpha)$．当$m$为偶数时，图1说明了这种情况．




(图中 $m$ 为偶数)

图 1

对每一个固定的 $k$, $0\leqslant k\leqslant m/2$, 在此要计算 $\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$ 在 $V_{\mu-k\alpha}$ 上的迹. 设 $0\leqslant i\leqslant k$. 在 $W$ 的一个首权为 $m-2i=(\mu-i\alpha)(h_\alpha)$ 的典型不可约 $S_\alpha$-加项中, 相应于 $\mu-k\alpha$ 的权空间是由向量 $w_{k-i}$ (前述的记法)所张成. 在公式 (1) 内把 $m$ 换成 $m-2i$, $i$ 换成 $k-i$, 可得

$$\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)w_{k-i}=(m-i-k)(k-i+1)[(\alpha,\ \alpha)/2]w_{k-i}. \quad (2)$$

在 $W$ 内有 $n_i$ 个 $S_\alpha$-加项具有首权 $m-2i$. 所以, 关于特征向量的一个适当的基, 矩阵 $\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$ (限制于 $V_{\mu-k\alpha}$) 有 $n_i$ 个形如 (2) 的对角元. 令 $i$ 从 0 跑到 $k$, 对于 $\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)$ 可得一个阶为 $m(\mu-k\alpha)=n_0+\cdots+n_k$ 的对角矩阵, 迹为:

$$\sum_{i=0}^{k}n_i(m-i-k)(k-i+1)(\alpha,\ \alpha)/2 \quad (3)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}(m(\mu-i\alpha)-m(\mu-(i-1)\alpha))(m-i-k)(k-i+1)(\alpha,\ \alpha)/2$$

$$=\sum_{i=0}^{k}m(\mu-i\alpha)(m-2i)(\alpha,\ \alpha)/2.$$

最后一个等式的得出是由于 $m(\mu-i\alpha)$ 的系数是 $(\alpha,\ \alpha)/2$ 乘以 $(m-i-k)(k-i+1)-(m-i-k+1)(k-i)=m-2i$. (对于极端情形 $i=k$, 读者可直接验证. )再回想起 $m/2=(\mu,\ \alpha)/(\alpha,\ \alpha)$. 所以(3)变成:

$$Tr_{V_{\mu-k\alpha}}\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)=\sum_{i=0}^{k}m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\ \alpha). \quad (4)$$

这样就处理了在“阶梯”顶上一半的权 $\mu-k\alpha$ (图 1). 因为反射 $\sigma_\alpha$ 把顶与底交换，所以我们可期望有类似的结果. 特别是对于 $m/2<i\leqslant m$, 有 $m(\mu-i\alpha)=m(\mu-(m-i)\alpha)$. 模仿上述推理，对固定的 $k$, $m/2<k\leqslant m$, 可得到:

$$Tr_{V_{\mu-k\alpha}}\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)=\sum_{i=0}^{m-k-1}m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\ \alpha). \tag{5}$$

(我们本应求和到 $m-k$, 但是 $\phi(z_\alpha)$ 零化权为 $\mu-k\alpha$ 的向量，而后者属于 $W$ 的具有首权 $\mu-(m-k)\alpha$ 的 $S_\alpha$-加项.)

又注意到，对于 $m/2<i\leqslant m$, 由于 $m=2(\mu,\ \alpha)/(\alpha,\ \alpha)$, 故 $(\mu-i\alpha,\ \alpha)+(\mu-(m-i)\alpha,\ \alpha)=(2\mu-m\alpha,\ \alpha)=0$. 所以

$$m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\ \alpha)+m(\mu-(m-i)\alpha)(\mu-(m-i)\alpha,\ \alpha)=0. \tag{6}$$

这说明了可把下列一对一对的项加到 (5) 式上去: $k-1$ 与 $m-(k-1)$, $k-2$ 与 $m-(k-2)$, 等等(请注意: 对于偶数 $m=2i$, (6) 式迫使 $(\mu-i\alpha,\ \alpha)=0$). 换句话说，对任意的 $k$, (5) 可化成 (4).

最后，如果要考虑 $V$ 的任意权 $\nu$, 可构成经过 $\nu$ 的 $\alpha$-链，并使最后一项 $\nu+k\alpha$ 起到上述公式内的 $\mu$ 的作用. 至于所有使 $V_\mu=0$ 的权 $\mu$, 规定 $m(\mu)=0$. 经过一些变化后，就可对于任意的 $\mu\in\Pi(\lambda)$ 把 (4) 重写为:

$$Tr_{V_\mu}\phi(x_\alpha)\phi(z_\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\ \alpha). \tag{7}$$

## 22.3. Freudenthal 公式

设 $\phi$, $V$ 同 (22.2) 一样，$\dim V>1$. 复习一下 (22.1) 中的普遍 Casimir 元素 $c_L=\sum_{i=1}^{l}h_ik_i+\sum_{\alpha\in\Phi}x_\alpha z_\alpha$. 由于 $\phi$ 是不可约的，$\phi(c_L)$ 是用一个纯量(譬如说 $c$)作乘法的. 固定 $V$ 的一个权 $\mu$, 在此需计算 $Tr_{V_\mu}\phi(c_L)=cm(\mu)$.

首先，$\phi(h_i)$ 正是在 $V_\mu$ 内用 $\mu(h_i)$ 作纯量乘法，$\phi(k_i)$ 也类似. 设 $t_\mu\in H$ 对所有 $h\in H$ 满足 $\mu(h)=\kappa(t_\mu,\ h)$ (如同 § 8). 记 $t_\mu=\sum_i a_ih_i$, 由定义，$\mu(h_i)=\sum_j a_j\kappa(h_j,\ h_i)$, 且 $\mu(k_i)=\sum_j a_j\kappa(h_j,k_i)=$

$a_i$(由对偶性). 因而 $(\mu,\ \mu)=\sum_{i,j}a_ia_j\kappa(h_j,\ h_i)=\sum_i\mu(h_i)\ \mu(k_i)$,所以

$$\sum_i Tr_{V_\mu}\phi(h_i)\phi(k_i)=m(\mu)(\mu,\ \mu). \tag{8}$$

合并(8)与(22.2)内的(7),则得:

$$cm(\mu)=(\mu,\ \mu)m(\mu)+\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{i=0}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\ \alpha). \tag{9}$$

注意到项 $m(\mu)(\mu,\ \alpha)$ 和 $m(\mu)(\mu,\ -\alpha)$ 都出现(而且对消),所以可省去指标 $i=0$.

在此可断定,对任意的 $\mu\in\Lambda$, $\mu\notin\Pi(\lambda)$, 公式(9)仍然有效. 此时它变成 $0=\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\ \alpha)$. 实际上,若 $\mu\notin\Pi(\lambda)$, 则对每一个 $\alpha\in\Phi$, 形如 $\mu+i\alpha$ 的权(如果存在的话)必须出现在所有 $i$ 都是正或所有 $i$ 都是负的链中. 在后一情形下, 关于 $\alpha$ 的所有加项都是 0, 而对于前一情形, 使用类似于(22.2)内关于公式(6)的论证,即可说明它也是正确的.

前面的讨论实际上说明了对每一个固定的 $\alpha\in\Phi$ 以及每一个 $\mu\in\Lambda$, 有

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\ \alpha)=0. \tag{10}$$

特别地,

$$\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu-i\alpha)(\mu-i\alpha,\ -\alpha)$$
$$=m(\mu)(\mu,\ \alpha)+\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\ \alpha). \tag{11}$$

把(11)代入(9)(按照(9)式后面的说明, 从 $i=1$ 开始求和), 我们最终得到:

$$cm(\mu)=(\mu,\ \mu)m(\mu)+\sum_{\alpha\succ0}m(\mu)(\mu,\ \alpha)$$
$$+2\sum_{\alpha\succ0}\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\ \alpha). \tag{12}$$

令 $\delta=(1/2)\sum_{\alpha\succ0}\alpha$(13.3), 这又可写成

$$cm(\mu)=(\mu,\ \mu+2\delta)m(\mu)+2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\ \alpha). \tag{13}$$

这一公式仅有的缺点是它仍含有 $c$. 但有一个特殊情况，此时我们知道 $m(\mu)$，即 $m(\lambda)=1$. 此外，对所有的正根 $\alpha$，所有的 $i\geqslant 1$，都有 $m(\lambda+i\alpha)=0$. 因而可解出(13)，得到 $c=(\lambda,\ \lambda+2\delta)=(\lambda+\delta,\ \lambda+\delta)-(\delta,\ \delta)$. (实际上要直接计算 $c$ 并不困难，见练习 23.4.)这些结果可归结为 **Freudenthal** 公式.

**定理** 设 $V=V(\lambda)$ 是首权为 $\lambda(\lambda\in\Lambda^+)$ 的不可约 $L$-模，如果 $\mu\in\Lambda$，则 $\mu$ 在 $V$ 内的重数 $m(\mu)$ 可从如下的递推得到：

$$((\lambda+\delta,\ \lambda+\delta)-(\mu+\delta,\ \mu+\delta))m(\mu)$$
$$=2\sum_{\alpha\succ 0}\sum_{i=1}^{\infty}m(\mu+i\alpha)(\mu+i\alpha,\ \alpha). \quad \blacksquare \tag{14}$$

还必须看到，从 $m(\lambda)=1$ 出发，Freudenthal 公式提供了计算重数的有效方法. 由于命题 21.3，(13.4)的引理 C 说明了对于 $\mu\in\Pi(\lambda)$，$\mu\neq\lambda$，量 $(\lambda+\delta,\ \lambda+\delta)-(\mu+\delta,\ \mu+\delta)$ 是非零的，所以当这个量等于 0，而 $\mu\neq\lambda$ 时，$m(\mu)=0$. 于是只要当所有的 $m(\mu+i\alpha)(i\geqslant 1,\ \alpha\succ 0)$ 为已知时，即，当所有的 $m(\nu)$，$\mu\precneqq\nu\prec\lambda$ 为已知时，就可知道 $m(\mu)$. (后面将给出具体例子.)

其实，只要利用在 Weyl 群下共轭的权具有相同重数这一事实(定理 21.2)，Freudenthal 公式的使用可以变得更加有效. 现在已经有计算机程序进行所涉及的计算. 注意：因为 $m(\mu)$ 只是作为商数而出现，故可以用我们认为方便的方法使内积正规化.

## 22.4. 例

为了在任一给定的情况下使用 Freudenthal 公式，我们必须要计算 $\Lambda$ 上的双线性型。前面使用的双线性型是"自然"的(对偶于 Killing 型的)，但根据上面的一段陈述，它可以用任意一个数乘使之正规化. 一个常用的方法是要求根的平方长度为 1，2 或 3，最小的是 1(对于 $\Phi$ 的每一个不可约分支). 或者也可选择在 § 12 内构造根系所用的内积.

**例 1** $L=\mathfrak{sl}(3,\mathsf{F})$, $\Phi=\{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\}$, $\Delta=\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\alpha_1=2\lambda_1-\lambda_2$, $\alpha_2=-\lambda_1+2\lambda_2$, $\lambda_1=(1/3)(2\alpha_1+\alpha_2)$, $\lambda_2=(1/3)(\alpha_1+2\alpha_2)$. 要求$(\alpha_i, \alpha_i)=1$, 所以$(\alpha_1, \alpha_2)=-1/2$, $(\lambda_i, \lambda_i)=1/3$, 且 $(\lambda_1, \lambda_2)=1/6$. 置 $\lambda=\lambda_1+3\lambda_2$, 则 Freudenthal 公式导出表 1 内的重数表. 为了读者的方便, 也列出了其它数据. 把权按"水平"分组: 在计算 $m(\mu)$时只需更高水平的数据. 读者可照(21.3)的图 1 那样画一个权图.

表 1

| $\mu$ | $m(\mu)$ | $(\mu+\delta, \mu+\delta)$ | $\mu=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$ |
|---|---|---|---|
| $\{\lambda$ | 1 | 28/3 | $\lambda_1+3\lambda_2$ |
| $\lambda-\alpha_1$ | 1 | 25/3 | $-\lambda_1+4\lambda_2$ |
| $\lambda-\alpha_2$ | 1 | 19/3 | $2\lambda_1+\lambda_2$ |
| $\lambda-\alpha_1-\alpha_2$ | 2 | 13/3 | $2\lambda_2$ |
| $\lambda-2\alpha_2$ | 1 | 16/3 | $3\lambda_1-\lambda_2$ |
| $\lambda-\alpha_1-2\alpha_2$ | 2 | 7/3 | $\lambda_1$ |
| $\lambda-2\alpha_1-\alpha_2$ | 1 | 13/3 | $-2\lambda_1+3\lambda_2$ |
| $\lambda-3\alpha_2$ | 1 | 19/3 | $4\lambda_1-3\lambda_2$ |
| $\lambda-2\alpha_1-2\alpha_2$ | 2 | 4/3 | $-\lambda_1+\lambda_2$ |
| $\lambda-\alpha_1-3\alpha_2$ | 2 | 7/3 | $2\lambda_1-2\lambda_2$ |
| $\lambda-\alpha_1-4\alpha_2$ | 1 | 13/3 | $3\lambda_1-4\lambda_2$ |
| $\lambda-2\alpha_1-3\alpha_2$ | 2 | 1/3 | $-\lambda_2$ |
| $\lambda-3\alpha_1-2\alpha_2$ | 1 | 7/3 | $-3\lambda_1+2\lambda_2$ |
| $\lambda-2\alpha_1-4\alpha_2$ | 1 | 4/3 | $\lambda_1-3\lambda_2$ |
| $\lambda-3\alpha_1-3\alpha_2$ | 2 | 1/3 | $-2\lambda_1$ |
| $\lambda-3\alpha_1-4\alpha_2$ | 1 | 1/3 | $-\lambda_1-2\lambda_2$ |
| $\lambda-4\alpha_1-3\alpha_2$ | 1 | 7/3 | $-4\lambda_1+\lambda_2$ |
| $\{\lambda-4\alpha_1-4\alpha_2$ | 1 | 4/3 | $-3\lambda_1-\lambda_2$ |

**例 2** 设 $L$ 是型 $\mathrm{G}_2$ 的单纯代数. $L$ 的根系在 (12.1) 内已被构造出. 回忆起 $\alpha_1$ 是短根, $\alpha_2$ 是长根, 所以 $\lambda_1=2\alpha_1+\alpha_2$, $\lambda_2=3\alpha_1+2\alpha_2$. 使用 Freudenthal 公式所得到的一些数据列在表 2 内. 权 $m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$ 简记为 $m_1m_2$. 每一行代表同一个首权 $\lambda$, 每一列代表同一支配权 $\mu$. $\lambda$ 行与 $\mu$ 列的相交处是整数 $m_\lambda(\mu)$ (当它为非零时). 读者可验证这个表的一部分.

表 2

| | 00 | 10 | 01 | 20 | 11 | 30 | 02 | 21 | 40 | 12 | 31 | 50 | 03 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 01 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 20 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 11 | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | | | | | | | | | |
| 30 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 02 | 5 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 21 | 9 | 8 | 6 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 40 | 8 | 7 | 5 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 12 | 10 | 10 | 7 | 7 | 5 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | |
| 31 | 16 | 14 | 12 | 10 | 7 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | |
| 50 | 12 | 11 | 9 | 8 | 6 | 5 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | | |
| 03 | 9 | 7 | 7 | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 22 | 21 | 19 | 16 | 15 | 11 | 9 | 7 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 |

## 22.5. 形式特征标

设 $\Lambda\subset H^*$ 是整线性函数的格. 如果 $V=V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$, 我们考虑权 $\mu\in\Pi(\lambda)$ 的形式和, 每一个 $\mu$ 在和中出现 $m(\mu)$ 次. 不过在这样一个形式和里, "$\mu+\nu$"不是一个理想的记号, 因为它在 $\Lambda$ 里已有具体的意义. 因此在此引入 $\Lambda$ 在 $\mathbf{Z}$ 上的群环, 记为 $\mathbf{Z}[\Lambda]$. 定义 $\mathbf{Z}[\Lambda]$ 为一个自由 $\mathbf{Z}$-模, 带有基元素 $e(\lambda)$, 它们与 $\Lambda$ 的元素 $\lambda$ 成一一对应, 并带有一个加法, 记为 $e(\lambda)+e(\mu)$. 如果规定 $e(\lambda)e(\mu)=e(\lambda+\mu)$, 且利用线性性质加以扩张, 则 $\mathbf{Z}[\Lambda]$ 变成交换环. (存在恒等元 $e(0)$.) 通过对 $e(\lambda)$ 作置换: $\sigma e(\lambda)=e(\sigma\lambda)$, $\mathscr{W}$ 自然地作用在 $\mathbf{Z}[\Lambda]$ 上.

现在, 把 $V(\lambda)$ 的形式特征标 $ch_{V(\lambda)}$ 或 $ch_\lambda$ 定义为 $\mathbf{Z}[\Lambda]$ 的元素 $\sum_{\mu\in\Pi(\lambda)} m_\lambda(\mu)e(\mu)$, 是有意义的. (因为当 $\mu\notin\Pi(\lambda)$ 时, $m_\lambda(\mu)=0$, 甚至可把和式扩展到所有的 $\mu\in\Lambda$.) 例如, 若 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$, $V(\lambda)$ 的形式特征标为: $ch_\lambda=e(\lambda)+e(\lambda-\alpha)+e(\lambda-2\alpha)+\cdots+e(\lambda-m\alpha)$, $m=\langle\lambda, \alpha\rangle$. 更一般地, 如果 $V$ 是任意(有限维) $L$-模, 根据 Weyl

定理以及分类理论(§ 21)，存在本质上唯一的分解 $V=V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_t)$，$\lambda_i\in\Lambda^+$. 所以 $ch_V=\sum_{i=1}^{t}ch_{\lambda_i}$ 可以称为 $V$ 的形式特征标. 注意: 因为 $\sigma$ 把 $V$ 的每一个不可约加项内的权空间作了一个置换(定理 21.2)，所以每一个 $\sigma\in\mathscr{W}$ 都使 $ch_V$ 不变.

由于下面的结果，对于 $ch_V$ 的了解实际上有助于我们发现 $V$ 的不可约加项.

**命题 A** 设 $f=\sum_{\lambda\in\Lambda}c(\lambda)e(\lambda)$，$c(\lambda)\in\mathbf{Z}$，它对于 $\mathscr{W}$ 的所有元素都不变，则 $f$ 可用一种，且仅可用一种方法写成 $ch_\lambda(\lambda\in\Lambda^+)$ 的 $\mathbf{Z}$ 线性组合.

**证** 显然 $f=\sum_{\lambda\in\Lambda^+}c(\lambda)\left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}e(\sigma\lambda)\right)$. 对于每一个使得 $c(\lambda)\neq 0$ 的 $\lambda\in\Lambda^+$，支配权 $\mu\prec\lambda$ 的集合是有限的((13.2) 的引理 B). 设 $M_f$ 是上述 $\mu$(对于前述所有 $\lambda$)的全体，故 $M_f$ 是有限的. 设 $\lambda\in\Lambda^+$ 是使得 $c(\lambda)\neq 0$ 的 $\lambda\in\Lambda^+$ 中的极大元，且令 $f'=f-c(\lambda)ch_\lambda$. 显然 $f'$ 仍然满足命题的假设. 我们知道在 $ch_\lambda$ 内出现的支配权 $\mu$ 都满足 $\mu\prec\lambda$，所以它们都在 $M_f$ 内. 这说明了 $M_{f'}\subset M_f$. 由于 $\lambda\notin M_{f'}$，这一包含关系是真正的. 对于 $\mathrm{Card}(M_f)$ 作归纳法，我们可把 $f'$ 写成所需的形式，于是 $f$ 也有所需的形式. 作为归纳法的起点，注意到 $\mathrm{Card}(M_f)=1$ 的情形是平凡的: 因为在这样的情况下，极小支配权 $\lambda$ 是在 $f$ 内出现的仅有的支配权，所以 $f=c(\lambda)ch_\lambda$，这里 $ch_\lambda=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}e(\sigma\lambda)$. 唯一性的论断留给读者(练习 8). ∎

下面的命题显示了形式特征标的一个长处: 它们可以相乘.

**命题 B** 设 $V$, $W$ 是(有限维)$L$-模. 则 $ch_{V\otimes W}=ch_V\cdot ch_W$.

**证** 一方面，根据(6.1)中所定义的 $L$ 在 $V\otimes W$ 上的作用方式，$V\otimes W$ 的权为形如 $\lambda+\mu$ ($\lambda$ 是 $V$ 的权，$\mu$ 是 $W$ 的权)是显然的。它们出现的重数为:

$$\sum_{\pi+\pi'=\lambda+\mu}m_V(\pi)m_W(\pi')$$

(见练习 21.7). 这正是由 $ch_W$ 形式地乘 $ch_V$ 所得到的结果. ∎

## 练　习

1. 设 $\lambda\in\Lambda^+$，不使用 Freudenthal 公式，证明：对 $\alpha\in\Delta$ 及 $0\leqslant k\leqslant\langle\lambda,\alpha\rangle$，有 $m_\lambda(\lambda-k_\alpha)=1$.

2. 证明 $c_L$ 是在 $\mathfrak{U}(L)$ 的中心内（见(23.2)）. [模仿(6.2)内的计算，但略去 $\phi$.] 再证明 $c_L$ 同 $L$ 所选择的基是无关的.

3. 在(22.4)的例 1 内，确定权的 $\mathscr{W}$-轨道，由此直接验证 $\mathscr{W}$-共轭权有同样的重数（见定理 21.2）. [参看练习 13.12.]

4. 验证(21.3)的图 1 中所标出的重数.

5. 使用 Freudenthal 公式以及在(22.4)的例 1 中提供的 $A_2$ 的数据，计算 $V(\lambda)$，$\lambda=2\lambda_1+2\lambda_2$ 的重数. 尤其是验证 $\dim V(\lambda)=27$ 以及权 0 的重数是 3. 画出权图.

6. 对型 $G_2$ 的 $L$，使用(22.4)的表 2 确定 $V(\lambda)$，$\lambda=\lambda_1+2\lambda_2$ 的所有权及其重数. 计算 $\dim V(\lambda)=286$. [参看练习 13.12.]

7. 设 $L=\mathfrak{sl}(2,\mathsf{F})$，而且把 $m\lambda_1$ 看作整数 $m$. 利用(22.5)的命题 A，B 以及定理 7.2，推导出 Clebsch-Gordan 公式：若 $n\leqslant m$，则 $V(m)\otimes V(n)\cong V(m+n)\oplus V(m+n-2)\oplus\cdots\oplus V(m-n)$，总共 $n+1$ 个加项.（参看练习 7.6.）

8. 证明命题 22.5A 的唯一性部分.

【附注】

Freudenthal 公式的证明取自 Jacobson[1]；也参见 Freudenthal[1] 和 Freudenthal-de Vries[1]. 至于计算，可参看 Agrawala, Belinfante [1], Beck, Kolman[1], Krusemeyer[1], Burgoyne, Williamson[1]. 一种不同的算法已由 Demazure[1] 发现. 表 2 的数据取自 Springer[1].

# 23. 特　征　标

在此目的是证明 Harish-Chandra 定理，它与无限维模 $Z(\lambda)$，$\lambda\in H^*$(20.3) 相伴的"特征标"是有关的. 这一定理在 § 24 中，被用于获得关于有限维模特征标的 Weyl 经典结果的一个简单代数证明. 作为预备知识（也有它独自的意义），我们将在(23.1)内证明一个关于"提升"不变量的 Chevalley 定理. 这些都不依赖于 Freudenthal 公式(22.3).

## 23.1. 不变多项式函数

如果$V$是有限维向量空间，对称代数$\mathfrak{S}(V^*)$(见(17.1))被称为$V$上的**多项式代数**，记为$\mathfrak{P}(V)$. 当$V^*$的一个固定基$(f_1, \cdots, f_n)$给出后，$\mathfrak{P}(V)$就变得和$n$个变量$f_1, \cdots, f_n$的多项式代数同样了. 在这一小节里我们考虑$\mathfrak{P}(L)$和$\mathfrak{P}(H)$.

因为权格$\Lambda$张成了$H^*$，$\lambda\in\Lambda$的多项式张成了$\mathfrak{P}(H)$. 应用配极法(练习5)后，纯幂$\lambda^k(\lambda\in\Lambda,\ k\in\mathbf{Z}^+)$已经足够张成$\mathfrak{P}(H)$了. 现在考虑$\mathscr{W}$，它作用在$H^*$上，从而作用在$\mathfrak{P}(H)$上. 设$\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$是由关于所有的$\sigma\in\mathscr{W}$不变的多项式函数所构成的子代数；这就是$H$上的**$\mathscr{W}$-不变多项式函数**的代数. (例如，若$L=\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$，$\lambda=$基本支配权，则$\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$是由$\lambda^2$生成带1的代数.) 如果用$\operatorname{Sym} f$表示$f\in\mathfrak{P}(H)$的所有不同的$\mathscr{W}$-共轭元之和，则显然所有的$\operatorname{Sym}\lambda^k\ (\lambda\in\Lambda^+,\ k\in\mathbf{Z}^+)$的集合张成了$\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$，这是因为每一个$\lambda\in\Lambda$是$\mathscr{W}$-共轭于一个支配整线性函数的(引理13.2A).

然后设$G=\operatorname{Int} L$，它由所有的$\exp\operatorname{ad} x$ ($x$幂零)生成. 则$G$通过$(\sigma f)(x)=f(\sigma^{-1}x)$ $(\sigma\in G,\ f\in\mathfrak{P}(L))$自然地作用在$\mathfrak{P}(L)$上，用$\mathfrak{P}(L)^G$表示$\mathfrak{P}(L)$的不变元素. 它们是$L$上的**$G$-不变多项式函数**.

$G$-不变多项式函数的很多例子可以如下地通过表示理论被构造出来. 设$\phi: L\to\mathfrak{gl}(V)$是$L$的(有限维)不可约表示，首权是$\lambda\in\Lambda^+$，而且设$z\in N=\coprod_{\alpha\succ 0} L_\alpha$，$\sigma=\exp\operatorname{ad} z$. 定义一个新的表示$\phi^\sigma$: $L\to\mathfrak{gl}(V)$为$\phi^\sigma(x)=\phi(\sigma(x))$，$x\in L$. (检验它确实满足$\phi^\sigma([xy])=[\phi^\sigma x, \phi^\sigma y]$. )显然$\phi^\sigma$仍然是不可约的. 如果$v^+\in V$是一个极大向量，且$\beta$是任一正根，则$\phi^\sigma(x_\beta)(v^+)=\phi((1+\operatorname{ad} z+(\operatorname{ad} z)^2/2!+\cdots)(x_\beta))(v^+)=0$，这是由于括号里的$L$的元素仍然在$N$内. 此外，$\phi^\sigma(h)(v^+)=\phi(h+[zh])(v^+)=\phi(h)(v^+)=\lambda(h)v^+$，这是因为$[zh]\in N$，$\phi(N)(v^+)=0$. 换句话说，$v^+$对于新的表示仍然是权$\lambda$的极大向量. 所以这两个表示$\phi$和$\phi^\sigma$是<u>等价的</u>(即：$V$上的

这两个$L$模结构是同构的(20.3)). 设$\psi_\sigma: V\to V$是$L$-模同构,使得$\psi_\sigma(\phi(x)(v))=\phi^\sigma(x)(\psi_\sigma(v))$, 对所有$v\in V$. 具体地说, $\psi_\sigma$正是$V$里面的基底变换, 而且这一等式说明了$\phi(x)$和$\phi^\sigma(x)=\phi(\sigma x)$的矩阵(关于$V$的一个固定的基)是相似的. 于是, 它们有相同的迹. 如果$k\in\mathbf{Z}^+$, 可知函数$x\mapsto \mathrm{Tr}(\phi(x)^k)$是$\sigma$-不变的. 但这是一个多项式函数: 因为从$\phi(x)$的(线性)坐标函数出发, $\phi(x)^k$的各元素都是它们的多项式, 而迹又是这些多项式的线性组合. 也请注意迹函数的不变性与基底(或正根)的选取无关, 甚至与$H$的选取无关. 所以实际上$x\mapsto\mathrm{Tr}(\phi(x)^k)$是关于$G$的所有生成元不变的(见练习16.2), 从而也关于$G$不变.

现在比较$\mathfrak{P}(L)^G$与$\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$(这正是整个讨论的要点). $L$上任一多项式函数当限制于$H$上时,是$H$上的一个多项式函数: 当$H$的一个基被扩展为$L$的基, 并且$f$被写成它的对偶基元素的多项式时, 可以清楚地看出这一点. 如果$f$又是$G$-不变的, 则它对于每一个在(14.3)内构造的内自同构$\tau_\alpha(\alpha\in\Phi)$更是不变的. 但$\tau_\alpha|_H$是反射$\sigma_\alpha$, 且$\sigma_\alpha$生成了$\mathscr{W}$, 故我们看到$f|_H\in\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$. 这样, 就得到一个代数同态$\theta: \mathfrak{P}(L)^G\to\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$.

**定理**(Chevalley) $\theta$是满射.

**证**(Steinberg) 据上述说明, 只要证明每个$\mathrm{Sym}\,\lambda^k(\lambda\in\Lambda^+, k\in\mathbf{Z}^+)$落在$\theta$的象集内即可. 为此我们对$\Lambda^+$的半序使用上升归纳法, 并从最低的$\lambda$出发(可能是0). (回忆引理13.2B, 位于已知权之下的支配权只有有限个.)因为$\lambda$是最低的, 没有其它的$\mu\in\Lambda^+$能够作为首权$\lambda$的不可约表示$\phi$的权. 根据定理20.2, 21.2, $\phi$中仅有的权是$\lambda$的$\mathscr{W}$-共轭元, 而且都是一重的. 现在$x\mapsto\mathrm{Tr}(\phi(x)^k)$是一个$G$-不变多项式函数$f$, 它限制于$H$上是$\mathrm{Sym}\,\lambda^k$, 所以$\mathrm{Sym}\,\lambda^k=\theta(f)$.

作为归纳法的步骤, 先固定$\lambda\in\Lambda^+$, $k\in\mathbf{Z}^+$. 仍然用$\phi$表示首权$\lambda$的不可约表示, $f$代表函数$x\mapsto\mathrm{Tr}(\phi(x)^k)$. 则$f|_H=\mathrm{Sym}\,\lambda^k+\sum m_\lambda(\mu)\mathrm{Sym}\,\mu^k$(定理21.2), 这里的和式取遍$\mu\precneqq\lambda$, $\mu\in\Lambda^+$. 根据归纳法假设, 涉及到$\mu\precneqq\lambda$的项都可提升到$\mathfrak{P}(L)^G$, 所以$\mathrm{Sym}\,\lambda^k$

也是可提升的. ∎

让我们对 $\mathfrak{P}(L)^G$ 作进一步观察. 把上述多项式函数 $x\mapsto \mathrm{Tr}(\phi(x)^k)$ 称为**迹多项式**. 如果 $x=x_s+x_n$ 是 $x$ 的 Jordan 分解, 则 $\phi(x)=\phi(x_s)+\phi(x_n)$ 是 $\phi(x)$ 的(通常)Jordan 分解(见(6.4)). 因为 $\phi(x_s)$ 与 $\phi(x_n)$ 可交换, 在 $(\phi(x_s)+\phi(x_n))^k$ 的展开式内, 除去 $\phi(x_s)^k$ 外, 其余的项均为幂零, 从而是迹为 0 的. 所以迹多项式的值完全由它在 $L$ 的半单纯元素上的值所确定. Chevalley 定理的证明实际上说明了 $\theta$ 把由迹多项式所生成的子代数 $\mathfrak{T}\subset\mathfrak{P}(L)^G$ 映到 $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ 上. 其实, $\theta|_{\mathfrak{T}}$ 既是满射的, 又是内射的: 因为 $\theta(f)=0$ 意味着 $f|_H=0$. 而 $L$ 的每个半单纯元素都位于某个极大环面子代数之内, 故由(16.4), 它在 $G$ 之下共轭于 $H$ 的一个元素. 因此 $f$ 在 $L$ 的所有半单纯元素上等于 0 就迫使 $f=0$ (根据上面的说明).

运用某些初等的代数几何(见后面的附录), 可以直接证明: $\theta$ 是内射的. 作为一个推论, $\mathfrak{P}(L)^G$ 由迹多项式生成. (不过我们并不需要这些结果.) 在(23.3)内可使用 $\theta^{-1}$, 但是读者可查证, 那里的论证实质上并不依赖于 $\theta$ 的内射性.

## 23.2. 标准循环模与特征标

设 $\mathfrak{Z}$ 是 $\mathfrak{U}(L)$ 的中心, 就是与所有的 $x\in\mathfrak{U}(L)$ 可交换的元素的集合, 或等价地, 是与所有的 $x\in L$ 可交换的元素的集合. 自同构 $\sigma: L\to L$ 可唯一地扩张为 $\mathfrak{U}(L)$ 的自同构, 所以作为特例, $G=\mathrm{Int}\,L$ 作用在 $\mathfrak{U}(L)$ 上, 它把 $\mathfrak{Z}$ 映到自身. 以下的事实将在(23.3)内被用到.

**引理** $\mathfrak{Z}$ 正是 $\mathfrak{U}(L)$ 的 $G$-不变量的集合.

**证** 一方面, $\mathfrak{Z}$ 与所有幂零 $x\in L$ 可交换, 故 $0=[xz]=\mathrm{ad}\,x(z)$ $(z\in\mathfrak{Z})$, 且 $\exp\mathrm{ad}\,x(z)=z$. 这意味着所有的 $\sigma\in G$ 都使 $z$ 不变. 反过来, 设 $G$ 使 $\mathfrak{U}(L)$ 的一个元素 $x$ 不变. 固定一个根 $\alpha\in\Phi$ 且取 $0\neq x_\alpha\in L_\alpha$. 若 $n=\mathrm{ad}\,x_\alpha$, 且设 $n^t\neq 0$ 而 $n^{t+1}=0$. 然后在 F 内选取 $t+1$ 个不同的纯量 $a_1, \cdots, a_{t+1}$ (这是可能的, 因为 F 无限).

据假设，$1+a_in+(a_i^2/2!)n^2+\cdots+(a_i^t/t!)n^t$ 使 $x$ 不变 $(1\leqslant i\leqslant t+1)$. 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2/2! & \cdots & a_1^t/t! \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{t+1} & a_{t+1}^2/2! & \cdots & a_{t+1}^t/t! \end{vmatrix}$$

是 Vandermonde 行列式 $\prod\limits_{i<j}(a_i-a_j)\neq 0$ 的$(2!3!\cdots t!)^{-1}$倍. 所以可找到纯量 $b_1, \cdots, b_{t+1}$, 满足: $n=\sum\limits_{i=1}^{t+1} b_i(\exp a_in)$. (严格地说，这是在 $\mathfrak{U}(L)$内由 $x$ 所生成的(有限维) $L$-子模的自同态空间里被施行的, 见练习 17.3.)作为其特例, $\mathrm{ad}\, x_\alpha(x)=\sum b_i\exp(\mathrm{ad}\, a_ix_\alpha)(x)=(\sum b_i)x$. 因为 $\mathrm{ad}\, x_\alpha$ 是幂零的, 故 $\sum b_i=0$, $[x_\alpha, x]=0$. 但 $x_\alpha$ 生成 $L$, 所以 $x$ 中心化 $L$ 且 $x\in\mathfrak{Z}$, 这正是所要求的. ∎

可以说, 普遍 Casimir 元素 $C_L(22.1)$属于 $\mathfrak{Z}$: 只要模仿 (6.2) 的计算, 略去 $\phi$ 即可.

接下去我们要问, $\mathfrak{Z}$ 是如何作用在(20.3) 中所构作的无限维模 $Z(\lambda)$, $\lambda\in H^*$ 上的? 如果 $v^+$ 是 $Z(\lambda)$的极大向量, 且 $z\in\mathfrak{Z}$, 注意到 $h.z.v^+=z.h.v^+=\lambda(h)z.v^+(h\in H)$, 以及 $x_\alpha.z.v^+=z.x_\alpha.v^+=0(x_\alpha\in L_\alpha,\ \alpha\succ 0)$. 所以 $z.v^+$ 是权 $\lambda$ 的另一个极大向量, 按照定理 20.2, $z.v^+$ 必须是 $v^+$ 的纯量倍, 即 $\chi_\lambda(z)v^+$. 这样得到的函数 $\chi_\lambda$: $\mathfrak{Z}\to\mathsf{F}$ 是一个 $\mathsf{F}$ 代数同态, 称为由 $\lambda$ 确定的特征标.

很清楚, $Z(\lambda)$中那些被 $z\in\mathfrak{Z}$ 作用相当于用 $\chi_\lambda(z)$作纯量乘法的向量的集合是 $\mathfrak{U}(L)$-不变的, 且包含 $v^+$, 从而必定是整个 $Z(\lambda)$. 因此 $z\in\mathfrak{Z}$ 作用在 $Z(\lambda)$ 的任一子模上都是用 $\chi_\lambda(z)$ 作纯量乘法(作用在 $Z(\lambda)$的任一同态象上也是类似的).

其实, 所有的 $\chi_\lambda(\lambda\in H^*)$ 并不是各不相同的. 为了得到特征标相等的精确条件, 当 $\lambda$, $\mu\in H^*$, 且 $\lambda+\delta$ 和 $\mu+\delta$ 为 $\mathscr{W}$-共轭时(这里的 $\delta=$正根之和的一半, 见 (13.3)), 则称 $\lambda$ 和 $\mu$ 是连接的(记作 $\lambda\sim\mu$). 显然, 连接是一个等价关系. 在此我们只关心整线性函数 (即 $\Lambda$ 的元素). 选取 $x_\alpha\in L_\alpha(\alpha\succ 0)$, $y_\alpha\in L_{-\alpha}$, 使$[x_\alpha y_\alpha]=h_\alpha$.

**命题** 设$\lambda\in\Lambda$, $\alpha\in\Delta$. 如果整数$m=\langle\lambda, \alpha\rangle$是非负的，则$Z(\lambda)$内$y_\alpha^{m+1}$的陪集是权$\lambda-(m+1)\alpha$的极大向量.

**证** 使用引理21.2的公式，以及$h_\alpha-\langle\lambda, \alpha\rangle\cdot 1\in I(\lambda)$(20.3)可得证. ▌

**推论** 设$\lambda\in\Lambda$, $\alpha\in\Delta$, $\mu=\sigma_\alpha(\lambda+\delta)-\delta$, 则$\chi_\lambda=\chi_\mu$.

**证** 因为$\sigma_\alpha$把$\alpha$以外的正根作一置换，且把$\alpha$变成$-\alpha$(引理10.2B)，故$\sigma_\alpha\delta-\delta=-\alpha$. 因此$\mu=\sigma_\alpha(\lambda+\delta)-\delta=\sigma_\alpha\lambda-\alpha=\lambda-(\langle\lambda, \alpha\rangle+1)\alpha$. 根据假设，$\langle\lambda, \alpha\rangle\in\mathbf{Z}$. 如果这个数非负，则上面的命题已经证明$Z(\lambda)$包含有$Z(\mu)$(异于0)的同态象，因此根据更前面的说明，$\chi_\lambda=\chi_\mu$. 如果$\langle\lambda, \alpha\rangle$是负的，则$\langle\mu, \alpha\rangle=\langle\lambda, \alpha\rangle-2(\langle\lambda, \alpha\rangle+1)=-\langle\lambda, \alpha\rangle-2$是非负的(除非$\langle\lambda, \alpha\rangle=-1$, 但此时$\mu=\lambda$, 没有什么要证的). 用$\mu$代替$\lambda$, 使用上述命题，再次得出$\chi_\lambda=\chi_\mu$. ▌

这一推论说明了：由一个单反射连接的两个整线性函数导致同一个特征标. 利用连接关系的可迁性以及$\mathscr{W}$由单反射生成这一事实(定理10.3(d))，我们可得一个更强的叙述:

**推论'** 设$\lambda$, $\mu\in\Lambda$. 如果$\lambda\sim\mu$, 则$\chi_\lambda=\chi_\mu$. ▌

这是Harish-Chandra定理(见(23.3))的易证的那一半. 以下我们可看到怎样把它扩展到包括所有的$\lambda$, $\mu\in H^*$. 但是本书所需要的只是整线性函数的情况.

## 23.3. Harish-Chandra 定理

**定理**(Harish-Chandra) 设$\lambda$, $\mu\in H^*$. 如果$\chi_\lambda=\chi_\mu$, 则$\lambda\sim\mu$.

这一小节主要是证明此定理. 证明的思路是不难理解的，但有许多映射需要我们理清楚. 首先固定$L$的一个方便的基，譬如说$\{h_i, 1\leqslant i\leqslant l; x_\alpha, y_\alpha, \alpha\succ 0\}$, 其中$h_i=h_{\alpha_i}$, $\Delta=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$. 然后按照下述顺序：$y_\alpha$在前，接着是$h_i$, 随后是$x_\alpha$, 构作$\mathfrak{U}(L)$与$\mathfrak{U}(H)$的PBW基. 如下定义线性映射$\xi:\mathfrak{U}(L)\to\mathfrak{U}(H)$, 它把$h_1$, $\cdots$, $h_l$的基单项式都映成自己，而其它基元素都映成0.

如果 $v^+$ 是不可约模 $V(\lambda)$, $\lambda\in H^*$ 的极大向量，考虑 $z\in\mathfrak{Z}$(用上面的 PBW 基表出)是怎样作用在 $v^+$ 上的. 在单项式 $\prod\limits_{\alpha>0}y_\alpha^{i_\alpha}\prod\limits_i h_i^{k_i}\prod\limits_{\alpha>0}x_\alpha^{j_\alpha}$ 中如果有某一 $j_\alpha>0$, 它就使 $v^+$ 变成 0, 而如果所有的 $j_\alpha=0$, 但某一 $i_\alpha>0$, 则它先把 $v^+$ 变成它自己的倍数，然后再变到较低的权向量. 所以仅有那些使所有的 $i_\alpha=0=j_\alpha$ 的单项式才对特征值 $\chi_\lambda(z)$ 起作用. 由此立即可得($\xi$ 同前):

$$\chi_\lambda(z)=\lambda(\xi(z)),\ z\in\mathfrak{Z}. \qquad (*)$$

($\lambda$: $H\to$F 可以典范地扩张成结合代数的同态 $\mathfrak{U}(H)\to$F. ) 根据(*), 请注意 $\xi$ 对 $\mathfrak{Z}$ 的限制是一个代数同态.

必须设法把 $\delta$ 牵连进去. 这可以如下进行. 把每一个 $h_i$ 变为 $h_i-1$, 再利用线性性质，可扩张成一个映射 $H\to\mathfrak{U}(H)$. 这是一个李代数同态(因所有李乘积是0)，故可扩张为同态 $\eta$: $\mathfrak{U}(H)\to\mathfrak{U}(H)$. 显然，$\eta$ 是一个自同构(它的逆映射把 $h_i$ 映成 $h_i+1$). 设 $\psi$: $\mathfrak{Z}\to\mathfrak{U}(H)$ 是复合同态 $\eta\circ\xi|_{\mathfrak{Z}}$, 回想起(13.3)中 $\delta=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i$ ($\lambda_i$ 是 $\Lambda$ 内的基本支配权)，所以 $\delta(h_i)=1$. 从而

$$(\lambda+\delta)(h_i-1)=(\lambda+\delta)(h_i)-(\lambda+\delta)(1)=(\lambda(h_i)+1)-1=\lambda(h_i).$$

因此 $$(\lambda+\delta)(\psi(z))=\lambda(\xi(z))\ (z\in\mathfrak{Z},\ \lambda\in H^*). \qquad (**)$$

将(**)式与(*)式联立后，可知 $\chi_\lambda(z)=(\lambda+\delta)(\psi(z))$. 现在设 $\lambda$ 是整线性函数. 根据(23.2)的推论，所有的共轭元 $\sigma(\lambda+\delta)$ 都在 $\psi(z)$ 上取同样的值; 等价于说: $\mu=\lambda+\delta$ 在 $\psi(z)$ 的所有 $\mathscr{W}$-共轭元上取相同的值. 这个结论对所有的 $\lambda\in\Lambda$ 都是正确的，因而对所有的 $\mu\in\Lambda$ 也正确，从而所有的线性函数在 $\psi(z)$ 的一切 $\mathscr{W}$-共轭元上都取同样的值. 但这样一来，$\mathscr{W}$ 必定使 $\psi(z)$ $(z\in\mathfrak{Z})$ 固定不变. 又由于 $H$ 是 Abel 的，可把这里的 $\mathfrak{U}(H)$ 换成对称代数 $\mathfrak{S}(H)$ (例 17.2). 所以，结论是: $\psi$ 把 $\mathfrak{Z}$ 映入 $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$(即 $\mathfrak{S}(H)$ 中被 $\mathscr{W}$ 固定的元素).

已经证明对所有的 $\lambda\in H^*$, 有 $\chi_\lambda(z)=(\lambda+\delta)(\psi(z))$, $(z\in\mathfrak{Z})$ 成立. 此外，$\psi(z)$ 是 $\mathscr{W}$-不变的，故用 $\sigma(\lambda+\delta)$ 代替 $\lambda+\delta$ 时，右边不发生变化. 于是若 $\lambda\sim\mu$($\mu$ 通过 $\sigma$ 与 $\lambda$ 连接)，则 $\chi_\lambda(z)=\chi_\mu(z)$.

这就证明了(23.2)的推论′可扩展到对所有的$\lambda$, $\mu\in H^*$上,如同那里所论述的.

我们已看到$\chi_\lambda(z)=(\lambda+\delta)(\psi(z))$, $\lambda\in H^*$. 假定$\chi_\lambda=\chi_\mu$, 则$\lambda+\delta$与$\mu+\delta$在$\psi(\mathfrak{Z})$上相同, 而$\psi(\mathfrak{Z})$又在$\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$内. 为了证明 Harish-Chandra 定理, 必须证明$\lambda+\delta$与$\mu+\delta$在$\mathscr{W}$之下共轭. 根据下述引理,只要证明$\psi(\mathfrak{Z})=\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$就够了.

**引理** 设$\lambda_1$, $\lambda_2\in H^*$位于不同的$\mathscr{W}$-轨道中, 则$\lambda_1$, $\lambda_2$在$\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}(=\mathfrak{P}(H^*)^{\mathscr{W}})$的某一个点上取不同的值.

**证** 这是初等的, 只需用到$\mathscr{W}$的有限性. 先选取$\mathfrak{S}(H)$内的某一多项式, 使$\lambda_1$不为0, 但是$\lambda_1$的所有其它$\mathscr{W}$-共轭元以及$\lambda_2$的所有$\mathscr{W}$-共轭元都为0. (为什么有这样的多项式存在?)把这一多项式的象加起来, 就得到$\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$的一个元素, 在其上, $\lambda_2$等于0, 而$\lambda_1$不是0. ∎

余下的工作是证明$\psi$把$\mathfrak{Z}$映到$\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$上. 在此还必须引入一个映射. 回顾$\mathfrak{S}(L)$可以等同于$\mathfrak{T}(L)$内的对称张量空间,这一空间与典范映射$\pi$: $\mathfrak{T}(L)\to\mathfrak{U}(L)$的核$J$互余(定理17.3的推论E). 设$G=\mathrm{Int}\,L$, 如同(23.1), $G$作用在$\mathfrak{T}(L)$上. 显然$\mathfrak{S}(L)$和$J$在$G$的作用下不变, 所以线性同构$\pi$: $\mathfrak{S}(L)\to\mathfrak{U}(L)$实际上是$G$-模的同构. 用$\mathfrak{S}(L)^G$表示被$G$固定的元素的子空间(其实是子代数). 按照引理23.2, $\pi$把$\mathfrak{S}(L)^G$映到$\mathfrak{Z}=\mathfrak{U}(L)^G$上. (注意: $\pi$不是代数同态,只是线性映射.)

现在有: $\mathfrak{S}(L)^G\xrightarrow{\pi}\mathfrak{Z}\xrightarrow{\psi}\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$. 这与(23.1)内所研究的结果: $\mathfrak{P}(L)^G\xrightarrow{\theta}\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$之间有着惊人的相似性. 在此, 借助于 Killing 型(它在$L$和$H$上都是非退化的), 可分别把$L$与$L^*$, $H$与$H^*$(用典范的方式)等同起来, 并且$G$, $\mathscr{W}$的作用与这一等同是相容的. 考虑这样所得到的图:

$$\begin{array}{ccccc}\mathfrak{S}(L)^G & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}\\ \updownarrow & & & & \updownarrow\\ \mathfrak{P}(L)^G & & \xrightarrow{\quad\theta\quad} & & \mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}\end{array}$$

不足的是，这个图不完全是交换的. 为了要看出应该怎样继续下去，现在先看一个简单的例子.

**例** 设 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$，带有标准基 $(x, y, h)$. 借助 Killing 型，对偶基 $(x^*, y^*, h^*)$ 可以等同于 $\left(\frac{1}{4}y, \frac{1}{4}x, \frac{1}{8}h\right)$（练习 5.5）. 如果 $\lambda$ 是基本支配权 $\left(\lambda=\frac{1}{2}\alpha\right)$，则在此 $\lambda$ 与 $h^*$ 等同，且 $\lambda^2$ 生成了 $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$. $\lambda$ 是 $L$ 的自然表示的首权，简单的计算（练习 1）即能说明迹多项式 $h^{*2}+x^*y^*$ 等于 $\theta^{-1}(\lambda^2)$. 把 $\mathfrak{P}(L)^G$ 与 $\mathfrak{S}(L)^G$ 等同后，它就变成了对称张量 $(1/64)(h\otimes h)+(1/32)(x\otimes y+y\otimes x)$. $\pi$ 把这一元素映到 $(1/64)h^2+(1/32)xy+(1/32)yx\in\mathfrak{Z}$. 接下去，为了计算在 $\psi$ 下的象，必须把这一元素写成 PBW 基（关于序 $y, h, x$）的形式，即 $(1/64)h^2+(2/32)yx+(1/32)h$. $\xi$ 把它映到 $(1/64)(h^2+2h)$，然后 $\eta$ 再把它映到 $\mathscr{W}$-不变量 $(1/64)(h^2-1)$. 再转化到 $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$，就导致 $\lambda^2-1/64$. 因而这一图确实不能交换. 虽然如此，这一偏离程度却是用比初始元素低"次"的不变量（这里是纯量 $1/64$）来度量的.

这个例子启发了我们如何证明 $\psi$ 是满射的（对于 $\mathfrak{sl}(2, \mathrm{F})$，这就是证明！）. 首先，约定把 $\mathfrak{P}(L)^G$ 与 $\mathfrak{S}(L)^G$ 等同；$\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ 与 $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ 等同. 如果 $\mathfrak{S}(H)$ 内的一个多项式在 $\mathscr{W}$ 下不变，则显然它的齐次部分也如此. 所以只要把齐次多项式提升到 $\mathfrak{Z}$ 就够了. 特别地，我们可对次数施行归纳法（常量显然是可提升的）.

在此，映射 $\theta$ 和 $\xi\circ\pi$ 在本质上是相同的（回想一下它们的定义），只不过在应用 $\xi$ 之前必须把"对称"元素 $\pi(f)$ 写成 PBW 基的形式. 这样就引进了一些新的项. 但若 $f$ 的次数是 $k$，则 $\pi(f)$ 是 $\mathfrak{U}(L)$ 的项 $x_1\cdots x_k$ 之和（$x_i$ 取在 $L$ 的固定基元素之中），所以通过交换得到的新项显然具有形式 $x_1\cdots x_j(j<k)$.

映射 $\eta$（它把 $h_i$ 变成 $h_i-1$）对于 $\mathfrak{S}(H)$ 内的多项式的最高次项不起作用. 结果是这样的：当先用 $\theta^{-1}$，接着用 $\pi$，然后用 $\psi$，绕图一圈时，可重新获得 $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ 的原始齐次元素，不过是在以较低次项为模的意义下. 根据归纳假设，较低次数的项已经是 $\mathfrak{Z}$ 的元

素在$\psi$下的象，这样就完成了所需的论证. ▮

## 附　　录

在本节里一个尚未证明的事实是：限制映射$\mathfrak{P}(L)^{G}\to\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$是内射的(23.1). 这一事实对于Harish-Chandra定理的证明是非本质的，但是如果忽略了它，也是不应该的. 在(仿射)代数几何学中，它可被叙述为一个简单的稠密性论证.

设$\mathsf{A}=\mathsf{F}^{n}$(称为**仿射$n$-空间**)，在此不考虑A的向量空间的结构. 设$\mathsf{F}[T]=\mathsf{F}[T_1, \cdots, T_n]$是$n$个不定元的多项式环. 如果$I$是$\mathsf{F}[T]$内的一个理想，令$\mathscr{V}(I)=\{x=(x_1, \cdots, x_n)\in\mathsf{A}\,|\,f(x)=0$ 对所有的 $f\in I\}$. 把集合$\mathscr{V}(I)$规定为闭集，就可把A拓扑化：显然$\emptyset$与A是闭集，且易验证，闭集的有限并集或任意交集仍是闭集(譬如说，利用$\mathscr{V}(\sum_{a} I_a)=\bigcap_{a}\mathscr{V}(I_a)$). A上的这一拓扑被称为**Zariski拓扑**. (当$\mathsf{F}=\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{C}$时，Zariski-闭集关于$\mathsf{F}^{n}$上通常的拓扑也是闭集，但反之不一定正确.)

如果$f(T)\in\mathsf{F}[T]$，函数$x\mapsto f(x)$($\mathsf{A}\to\mathsf{F}$)称为A上的**多项式函数**. 显然这样一个函数在Zariski拓扑内是连续的，这里的F被赋予了仿射1-空间的Zariski拓扑. 因为F是无限的，A上为零的多项式只可能是零多项式.

如果A的一个子集不能被这样的两个闭集共同覆盖：它们中的每一个闭集都不能单独覆盖此子集，则称此子集为**不可约的**. (“不可约”意味着“连通”，但反之不一定对.)

**引理**　A是不可约的.

**证**　设$\mathsf{A}=\mathscr{V}(I_1)\cup\mathscr{V}(I_2)$，且假定这两个闭集都是真子集，则$I_1\neq0$, $I_2\neq0$. 设$f\in I_1$, $g\in I_2$是非零多项式，则$fg\neq0$，但$fg$在A上恒等于0，这是荒谬的. ▮

**推论**　A内任意非空开集是稠密的.

**证**　设$U$是非空开集. 如果$U$不是稠密的，则存在A的非空开集$V$，$U\cap V=\emptyset$. 此时闭集$\mathsf{A}-U$, $\mathsf{A}-V$是真子集，而且覆盖A，这与上述引理相矛盾. ▮

现在回到§23的情形：$L$是半单纯的，$H$是CSA(等等). 固定$L$的一个基，使得$L$等同于一个仿射$n$空间($n=\dim L$)，且$\mathfrak{P}(L)$等同于上述意义下

的多项式函数．关于这个基，把 $\mathrm{ad}\,x$ 写成 $n\times n$ 矩阵，它的坐标是 $L$ 上的线性函数(从而是多项式函数)．同时设 $T$ 是一个不定元，并且(对于 $x\in L$)记 $p_x(T)=\mathrm{ad}\,x$ 的特征多项式 $=\sum_{i=0}^{n}c_i(x)T^i$．显然 $c_i$ 都是 $L$ 上的多项式函数．

我们把使得 $c_m$ 不恒等于 0 的最小整数 $m$ 称为 $L$ 的 $\rho$-秩，且若 $c_m(x)\neq 0$，则称 $x\in L$ 为 $\rho$-正则的．也就是说，$x$ 是 $\rho$-正则的，当且仅当作为 $\mathrm{ad}\,x$ 的特征值的 0 具有最小重数时．这说明了 $x$ 为 $\rho$-正则，当且仅当 $x_s$ 为 $\rho$-正则(因为它们有同样的特征多项式)；特别，$\rho$-正则的半单纯元素是存在的．显然 $L$ 的所有 $\rho$-正则元素的集合 $\mathscr{R}$ 是开的，由于它是开的，又是非空的，故它是稠密的(根据上述推论)．

如果 $x\in L$ 是半单纯的，则 $x$ 在一个极大环面子代数内，故共轭定理意味着 $x$ 在 $G$ 之下共轭于 $H$ 的某一元素．但若 $h\in H$，我们知道 $\dim C_L(h)\geqslant l=\mathrm{rank}\,L$；我们也知道 $H$ 中有这样的元素(称为正则的)，对于它，$\dim C_L(h)=l$(15.3)．因为 $\rho$-正则的半单纯元素存在，它们必须与正则半单纯元素重合(且 $m=l$)．但是除了 0 以外，没有一个幂零元能够中心化一个正则半单纯元素．联系到前面一段，可知 $x$ 为 $\rho$-正则，意味着 $x=x_s$．这就容许我们把 $\mathscr{R}$ 描述为所有正则半单纯元素的集合．

现在令 $f\in\mathfrak{P}(L)^G$，$f|_H=0$．这意味着 $f$ 在 $\mathscr{R}$ 上等于 0，而 $\mathscr{R}$ 是稠密的，所以 $f=0$．于是 $\theta:\mathfrak{P}(L)^G\to\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ 是内射的．

## 练　习

1．在(23.3)的例子中，验证所给出的迹多项式是正确的．

2．对于型 $\mathrm{A}_2$，$\mathrm{B}_2$，$\mathrm{G}_2$ 的代数，计算出 $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ 的生成元，用基本支配权 $\lambda_1$，$\lambda_2$ 表示．运用本节的算法，说明它们中的一些是如何被提升到 $\mathfrak{Z}$ 的．(注意 $\mathfrak{P}(H)^{\mathscr{W}}$ 是带有 $l=2$ 个生成元的多项式代数．)

3．证明当 $\lambda$ 是 $H$ 上的任意线性函数时，只要 $\langle\lambda,\alpha\rangle$ 是整数，命题 23.2 仍然正确．

4．由(23.3)的公式(*)，$\chi_\lambda(z)=\lambda(\xi(z))$，直接计算 $V(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda^+)$ 上的普遍 Casimir 元素 $c_L$(22.1)的值：$(\lambda+\delta,\lambda+\delta)-(\delta,\delta)$．[首先回忆一下 $t_\alpha$ 与 $h_\alpha$，$z_\alpha$ 与 $y_\alpha$ 是如何联系的．按 PBW 基的顺序重写 $c_L$，再使用(22.3)内对任一个权 $\mu$ 所导出的事实：$(\mu,\mu)=\sum_i\mu(h_i)\mu(k_i)$．]

5．证明 $\mathrm{F}(\mathrm{Char}\,\mathrm{F}=0)$ 上任一个 $n$ 变量的多项式是线性多项式的幂的线性组合．[对 $n$ 使用归纳法．展开 $(T_1+aT_2)^k$，然后使用 Vandermonde 行列

式的论证以说明线性多项式的 $k$ 次幂所张成的空间的维数，正是 $n=2$ 时应有的维数. ]

6. 若 $\lambda\in\Lambda^+$. 证明所有与 $\lambda$ 连接的 $\mu$ 都满足 $\mu\prec\lambda$, 因而所有这样的 $\mu$ 都作为 $Z(\lambda)$ 的权而出现.

7. 设 $\mathfrak{D}=[\mathfrak{U}(L),\mathfrak{U}(L)]$ 是 $\mathfrak{U}(L)$ 的子空间, 它由所有的 $xy-yx$ ($x, y\in\mathfrak{U}(L)$) 所张成. 证明 $\mathfrak{U}(L)$ 是子空间 $\mathfrak{D}$ 与 $\mathfrak{Z}$ 的直和 (因而可容许把 $\chi_\lambda$ 扩张到整个 $\mathfrak{U}(L)$ 上, 只要令它在 $\mathfrak{D}$ 上等于 0 即可). [回忆练习 17.3, $\mathfrak{U}(L)$ 是有限维 $L$-模之和, 因为 $L$ 是半单纯的, 因而是完全可约的. 证明 $\mathfrak{Z}$ 是 $\mathfrak{U}(L)$ 的所有平凡 $L$-子模之和, 而 $\mathfrak{D}$ 重合于所有的 $\mathrm{ad}\,x(y)$ ($x\in L$, $y\in\mathfrak{U}(L)$) 的空间, 后者是 $\mathfrak{Z}$ 的余空间. ]

8. 证明权格 $\Lambda$ 在 $H^*$ 内是 Zariski 稠密的 (见附录), $H^*$ 被等同于仿射 $l$-空间. 使用它给出以下命题的另一个证明: (23.2) 的推论可扩展到所有的 $\lambda, \mu\in H^*$.

9. 每一个 F 代数同态 $\chi$: $\mathfrak{Z}\to$F 是形如 $\chi_\lambda$ 的, 这里 $\lambda\in H^*$. [把 $\chi$ 看成一个同态 $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}\to$F, 证明它的核生成 $\mathfrak{S}(H)$ 的一个真理想. ]

10. 证明映射 $\psi$: $\mathfrak{Z}\to\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ 与 $\Delta$ 的选择无关.

【附注】

Chevalley 定理 23.1 的 Steinberg 证明记载在 Verma[1] 以及 Varadarajan[1] 中. 关于 Harish-Chandra 对"特征标"所做的工作, 见 Bourbaki[3], Harish-Chandra [1], Séminaire "Sophus Lie" [1] 第 19 篇以及 Varadarajan [1], Verma [1]. Chevalley[5] 证明了 $\mathfrak{S}(H)^{\mathscr{W}}$ 是一个多项式代数.

## 24. Weyl 公式, Kostant 公式与 Steinberg 公式

采用 § 23 的记号, 我们将利用 Harish-Chandra 定理 (23.3) 以得到一些关于有限维 $L$-模的特征标及重数的重要公式. (关于避免使用 § 23 的简便方法, 见后面的附录.)

### 24.1. $H^*$ 上的一些函数

对于 $\lambda\in\Lambda^+$, $V(\lambda)$ 的形式特征标 $ch_\lambda$ 已在 (22.5) 引入 $ch_\lambda=\sum_{\mu\in\Lambda}m_\lambda(\mu)e(\mu)$, 这里的 $e(\mu)$ 构成群环 $\mathbf{Z}[\Lambda]$ 的基. 对于无限维模 $Z(\lambda)$, 定义形式特征标也是方便的, 但是其中无限形式和是难以处理的. 作为替代, 在此使用一个更富于启发性的形式. $\mathbf{Z}[\Lambda]$ 可

以看成 $\Lambda$ 上 $\mathbf{Z}$-值函数（它在一个有限集之外都取 0）的集合. 读者易验证，乘积运算变成了卷积，$f*g(\lambda)=\sum_{\mu+\nu=\lambda}f(\mu)g(\nu)$.

设 $\mathfrak{X}$ 是 $H^*$ 上所有下述的 F-值函数 $f$ 的空间：$f$ 的支承集（定义为使 $f(\lambda)\neq 0$ 的 $\lambda\in H^*$ 的集合）被包含在形如 $\{\lambda-\sum_{\alpha>0}k_\alpha\alpha,\ k_\alpha\in\mathbf{Z}^+\}$（这个集合当然就是出现在模 $Z(\lambda)$ $(\lambda\in H^*)$ 内的权集）的集合的有限并集内.

稍微想一下就可看出，$\mathfrak{X}$ 在卷积之下是封闭的；于是它成为一个交换、结合的 F-代数，包含有任一标准循环 $L$-模的形式特征标 $ch_V$.

有时把 $f\in\mathfrak{X}$ 看作为 $\lambda\in H^*$ 的一个形式组合（系数在 F 内）是方便的. 那么，与前面的 $e(\lambda)$ 相对应的是什么呢？显然，这就是特征函数 $\varepsilon_\lambda(\lambda)=1$，$\varepsilon_\lambda(\mu)=0$（若 $\mu\neq\lambda$）. 请注意：$\varepsilon_0$ 是环 $\mathfrak{X}$ 的恒等元，且 $\varepsilon_\lambda*\varepsilon_\mu=\varepsilon_{\lambda+\mu}$. Weyl 群 $\mathscr{W}$ 通过 $(\sigma^{-1}f)(\lambda)=f(\sigma\lambda)$ 作用在 $\mathfrak{X}$ 上，特别地，$\sigma^{-1}(\varepsilon_\lambda)=\varepsilon_{\sigma\lambda}$.

现在必须引入 $\mathfrak{X}$ 中另外两个有用的元素. 首先，设 $p(\lambda)$ 是使得 $-\lambda=\sum_{\alpha>0}k_\alpha\alpha$ 的非负整数组 $\{k_\alpha,\ \alpha>0\}$ 的个数. 若 $\lambda$ 不在根格内，当然 $p(\lambda)=0$. 注意到 $p=\mathrm{ch}_{Z(0)}$（练习 20.5），故 $p\in\mathfrak{X}$. 我们称 $p$ 为 **Kostant 函数**（它与 Kostant 划分函数的区别仅在于 $\lambda$ 的符号不同）. 然后，再令 $q=\prod_{\alpha>0}(\varepsilon_{\alpha/2}-\varepsilon_{-\alpha/2})$（这里的乘积符号 $\Pi$ 同样代表 $\mathfrak{X}$ 内的卷积），称 $q$ 为 **Weyl 函数**.

现在证明关于上面定义的各种函数的一些简单引理. 设对于每一个正根 $\alpha$，$k\in\mathbf{Z}^+$，$f_\alpha(-k\alpha)=1$，否则，$f_\alpha(\lambda)=0$.（$f_\alpha$ 可以形式上看作 $\varepsilon_0+\varepsilon_{-\alpha}+\varepsilon_{-2\alpha}+\cdots$.）显然 $f_\alpha\in\mathfrak{X}$.

**引理 A** (a) $p=\prod_{\alpha>0}f_\alpha$.

(b) $(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*f_\alpha=\varepsilon_0$.

(c) $q=\varepsilon_\delta*\prod_{\alpha>0}(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})$.

**证** (a) 从卷积的定义立即可得出.

(b) 形式地，$(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*(\varepsilon_0+\varepsilon_{-\alpha}+\varepsilon_{-2\alpha}+\cdots)=\varepsilon_0$，因为所有

其它的项都消去了.（这可以严格地得出.）

(c) 因为 $\delta=\sum_{\alpha\succ 0}\frac{1}{2}\alpha$, $\varepsilon_\delta=\prod_{\alpha\succ 0}\varepsilon_{\alpha/2}$. 但 $(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*\varepsilon_{\alpha/2}=\varepsilon_{\alpha/2}-\varepsilon_{-\alpha/2}$, 从而得到所需的结果. ▌

**引理 B** $\sigma q=(-1)^{l(\sigma)}q\ (\sigma\in\mathscr{W})$, $l(\sigma)$ 如同(10.3).

**证** 只要当 $\sigma=\sigma_\alpha$ 是一个单反射，即 $l(\sigma)=1$ 时加以证明即可. 但 $\sigma_\alpha$ 把除 $\alpha$ 以外的正根作一置换，且把 $\alpha$ 映成 $-\alpha$ (引理 10.2B), 所以 $\sigma_\alpha q=-q$. ▌

**引理 C** $q*p*\varepsilon_{-\delta}=\varepsilon_0$.

**证** 联合运用引理 A 的三个部分，于是得到：

$$q*p*\varepsilon_{-\delta}=\prod_{\alpha\succ 0}(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*\varepsilon_\delta*p*\varepsilon_{-\delta}$$
$$=\prod_{\alpha\succ 0}(\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*p=\prod_{\alpha\succ 0}((\varepsilon_0-\varepsilon_{-\alpha})*f_\alpha)=\varepsilon_0.$$

**引理 D** $ch_{Z(\lambda)}(\mu)=p(\mu-\lambda)=(p*\varepsilon_\lambda)(\mu)$.

**证** 第一个等式是明显的（见练习 20.5），第二个等式是等价的. ▌

**引理 E** $q*ch_{Z(\lambda)}=\varepsilon_{\lambda+\delta}$.

**证** 联合运用引理 C 和 D. ▌

在引理 B 中出现的系数 $(-1)^{l(\sigma)}$ $(\sigma\in\mathscr{W})$ 以后将简称为 $\mathrm{sn}(\sigma)$. 回想起当 $L$ 是型 $A_l$ 时，$\mathscr{W}$ 同构于对称群 $\mathscr{S}_{l+1}$, 且 $\mathrm{sn}(\sigma)$ 就是置换 $\sigma$ 的符号（偶置换为+，奇置换为−）.

## 24.2. Kostant 重数公式

在此我们的想法，是把有限维模 $V(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda^+)$ 的形式特征标 $ch_\lambda$ 表示成某些 $ch_{Z(\mu)}$ 的 $\mathbf{Z}$-线性组合，然后再使用上一小节的引理（以及 Harish-Chandra 定理）以简化这一结果.

设 $\mathfrak{M}_\lambda$ 为具有以下性质（关于固定的 $\lambda\in H^*$）的 $L$-模 $V$ 的全体：

(1) $V$ 是（关于 $H$ 的）权空间的直和.

(2) $\mathfrak{Z}$ 在 $V$ 上的作用就是用纯量 $\chi_\lambda(z)$ $(z\in\mathfrak{Z})$ 作乘法，这里

$\lambda\in H^*$是已给的，$\mathfrak{Z}=\mathfrak{U}(L)$的中心.

(3) $V$的形式特征标属于$\mathfrak{X}$.

当然，所有权$\lambda$的标准循环模符合这些准则. 所以它们的子模也如此(这些子模并不总是标准循环子模之和). 实际上，$\mathfrak{M}_\lambda$在取子模、取同态象以及形成有限直和这些运算之下是封闭的. 根据Harish-Chandra定理(23.3)，$\mathfrak{M}_\lambda=\mathfrak{M}_\mu$恰当$\lambda$和$\mu$是连接权时成立.

**引理** 设$V\in\mathfrak{M}_\lambda$，则$V$至少具有一个极大向量(若$V\neq 0$).

**证** 根据性质(3)，若$\alpha\succ 0$是任一根，$\mu$是$V$的任一权，则对于所有充分大的$k\in\mathbf{Z}^+$，$\mu+k\alpha$都不是$V$的权. 因此存在某个权$\mu$，使得没有一个$\mu+\alpha$是权($\alpha\succ 0$). 此时$V_\mu$内的任一非零向量是极大的. ∎

对于每一个$\lambda\in H^*$，令$\theta(\lambda)=\{\mu\in H^*|\mu\prec\lambda$且$\mu\sim\lambda\}$. 回顾(23.2)，$\mu\sim\lambda$意味着$\mu+\delta$与$\lambda+\delta$是$\mathscr{W}$-共轭的. 在下述的关键性结果里，Harish-Chandra定理被用来限制$Z(\lambda)$的合成因子可能具有的首权.

**命题** 设$\lambda\in H^*$，则

(a) $Z(\lambda)$具有一个合成列.

(b) $Z(\lambda)$的每一合成因子是形如$V(\mu)$的，这里$\mu\in\theta(\lambda)$且$V(\mu)$是如同(20.3)所定义的.

(c) $V(\lambda)$作为$Z(\lambda)$的合成因子只出现一次.

**证** (a) 如果$Z(\lambda)$是不可约的，则$Z(\lambda)=V(\lambda)$，没有什么要证的. 否则，$Z(\lambda)$有一个非零真子模$V$，它在$\mathfrak{M}_\lambda$内(所给的$\lambda$被用于条件(2)). 由于$\dim Z(\lambda)_\lambda=1$，$\lambda$不会是$V$的权. 根据上述引理，$V$有一个极大向量(譬如说它的权是$\mu\precneqq\lambda$的)，于是$V$包含有$Z(\mu)$的一个非零同态象$W$. 尤其是$\chi_\lambda=\chi_\mu$，所以$\lambda\sim\mu$(根据Harish-Chandra定理)，且$\mu\in\theta(\lambda)$. 现在考虑$Z(\lambda)/W$和$W$. 这两个模都是标准循环的(且在$\mathfrak{M}_\lambda$内)，但是或者它们所具有的与$\lambda$连接的权比$Z(\lambda)$所具有的少，或者尽管它们有同样的与$\lambda$连接的权，但某些权的重数比$Z(\lambda)$内的少. 对$Z(\lambda)/W$及$W$

重复应用上述论证，又可得出一批子模及子模的同态象，它们或者具有较少的与 $\lambda$ 连接的权，或者这些权的重数较少．这一过程会在有限多步后结束，得到 $Z(\lambda)$ 的一个合成列．

(b) $Z(\lambda)$ 的每一合成因子都在 $\mathfrak{M}_\lambda$ 内，所以具有一个极大向量(根据引理)，于是必定是标准循环的(因它是不可约的)．根据(20.2)，每个合成因子同构于某一 $V(\mu)$．我们已知 $\mu$ 必定属于 $\theta(\lambda)$．

(c) 这是显然的，因为 $\dim Z(\lambda)_\lambda=1$．▮

这一命题容许我们写成：$ch_{Z(\lambda)}=ch_{V(\lambda)}+\sum d(\mu)ch_{V(\mu)}(d(\mu)\in\mathbf{Z}^+)$，其中的和式取遍 $\mu\in\theta(\lambda)$，$\mu\neq\lambda$．在此仍固定 $\lambda\in H^*$，并给予 $\theta(\lambda)$ 的元素一个序 $(\mu_1,\cdots,\mu_t)$，要求它满足以下条件：$\mu_i\prec\mu_j$ 意味着 $i\leqslant j$(特别是 $\lambda=\mu_t$)．按照上述命题，每一个 $ch_{Z(\mu_j)}$ 可表成 $ch_{V(\mu_i)}(i\leqslant j)$ 的 $\mathbf{Z}$-线性组合($ch_{V(\mu_j)}$ 的系数是 1)．因此结果所得到的 $t$ 个方程的方程组相对于已经选定的序，具有三角矩阵，而且对角线元素都是 1；于是它的行列式等于 1，从而可在 $\mathbf{Z}$ 上求出它的逆，进而把每一个 $ch_{V(\mu_j)}$ 表成 $ch_{Z(\mu_i)}(i\leqslant j)$ 的 $\mathbf{Z}$-线性组合，且 $ch_{Z(\mu_j)}$ 的系数为 1．(当然某些系数可以是负的.)

**推论** 设 $\lambda\in H^*$，则 $ch_{V(\lambda)}$ 是一个 $\mathbf{Z}$-线性组合 $\sum c(\mu)\,ch_{Z(\mu)}$ (在 $\mu\in\theta(\lambda)$ 上求和)，且 $c(\lambda)=1$．▮

在此把推论应用于 $\lambda$ 是支配整，$ch_\lambda=ch_{V(\lambda)}$ 的特殊情况．此时 $\dim V(\lambda)$ 是有限的，且对所有的 $\sigma\in\mathscr{W}$ 有 $\sigma(ch_\lambda)=ch_\lambda$ (定理 21.2)．据推论，记 $ch_\lambda=\sum c(\mu)ch_{Z(\mu)}\,(\mu\in\theta(\lambda))$，$c(\lambda)=1$．由(24.1)的引理 E，$q*ch_\lambda=\sum c(\mu)\,\varepsilon_{\mu+\delta}$．据(24.1)的引理 B，$\sigma(q*ch_\lambda)=\sigma(q)*\sigma(ch_\lambda)=\mathrm{sn}(\sigma)\,q*ch_\lambda\ (\sigma\in\mathscr{W})$．另一方面，$\sigma(\sum c(\mu)\,\varepsilon_{\mu+\delta})=\sum c(\mu)\,\varepsilon_{\sigma(\mu+\delta)}$．因为 $\mathscr{W}$ 可迁地置换 $\mu+\delta$ ($\mu$ 与 $\lambda$ 是连接的)，而且 $c(\lambda)=1$，立即可知 $c(\mu)=\mathrm{sn}(\sigma)$ (当 $\sigma^{-1}(\mu+\delta)=\lambda+\delta$)．所以

$$q*ch_\lambda=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\,\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)} \qquad (*)$$

最后，应用(24.1)的引理 C 于此等式，即可得到：

$$ch_\lambda = q * p * \varepsilon_{-\delta} * ch_\lambda = p * \varepsilon_{-\delta} * \left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}\right)$$
$$= p * \left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)-\delta}\right)$$
$$= \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma) p * \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)-\delta}.$$

**定理**(Kostant) 设$\lambda\in\Lambda^+$，则$V(\lambda)$的重数由以下公式给出：

$$m_\lambda(\mu) = \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma) p(\mu+\delta-\sigma(\lambda+\delta)). \quad \blacksquare$$

此公式的优点是直接表示出了重数．但在实际使用时，Freudenthal 递推公式(§ 22)更加简单，这是因为当秩很高时，在 Weyl 群上求和会变得非常麻烦．

## 24.3. Weyl 公式

**引理** $q = \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}$.

**证** 这容易直接证明，但我们不这样做，而用(24.2)的公式(*)．如果$\lambda=0$，当然$ch_\lambda=\varepsilon_0$，而(*)的右边成为$\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}$. ▮

**定理**(Weyl) 设$\lambda\in\Lambda^+$，则

$$\left(\sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}\right) * ch_\lambda = \sum_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}.$$

**证** 使用(24.2)的公式(*)及上述引理． ▮

Weyl 特征标公式实际上是说：我们可以作$\mathbf{Z}[\Lambda]$内两个简单的交替和式的商以计算$ch_\lambda$．而在实际上，作这样的"除法"可能是十分费劲的，因而 Freudenthal 方法(§ 22)往往更快一些．不过可从 Weyl 公式导出一个极其有用的公式，它是关于$V(\lambda)(\lambda\in\Lambda^+)$的维数的，把这个维数记为$\deg(\lambda)$．因$V(\lambda)$是权空间的直和，显然$\deg(\lambda)=\sum_{\mu\in\Pi(\lambda)} m_\lambda(\mu)$．这恰好是形式和$\sum_{\mu} m_\lambda(\mu)e(\mu)\in\mathbf{Z}[\Lambda]$的系数之和．在函数记法下，它变成$ch_\lambda$的函数值之和．在此我们在由特征函数$\varepsilon_\lambda(\lambda\in\Lambda)$所生成的子代数$\mathfrak{X}_0\subset\mathfrak{X}$内展开工作．对于$f\in\mathfrak{X}_0$，我们令$f$的函数值之和与$f$对应，就可得到一个同态$v: \mathfrak{X}_0\to\mathsf{F}$，这个函数是确定的．问题是要作$\lambda$的函数来计算$v(ch_\lambda)$．

不巧的是，把 $v$ 应用到如同 $\sum sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma\delta}$ 那样的交替和上将会出现 0，所以必须间接地进行．对于任一 $\lambda\in\Lambda^+$，把 $\sum sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$ 缩写为 $\omega(\lambda+\delta)$．

对应 $\varepsilon_\lambda\mapsto(\lambda,\alpha)\varepsilon_\lambda$（对固定的根 $\alpha$）可扩张为 $\mathfrak{X}_0$ 上的一个自同态 $\partial_\alpha$，实际上它是一个导子．自同态 $\partial=\prod\limits_{\alpha>0}\partial_\alpha$ 一般地说不再是导子，但可看作为一个微分算子．Weyl 公式可写成：$\omega(\delta)*ch_\lambda=\omega(\lambda+\delta)$．这里的 $\omega(\delta)$ 是 Weyl 函数（以前记为 $q$），它等于 $\varepsilon_{-\delta}*\prod\limits_{\alpha>0}(\varepsilon_\alpha-1)$（见引理 24.1A(c)）．把这个式子乘以 $ch_\lambda$，再应用 $\partial$（利用导子 $\partial_\alpha$ 的乘积公式），然后应用 $v$．由于 $v(\varepsilon_\alpha-1)=0$，故得出的大多数项都消失了．剩下的是 $v(\partial\omega(\delta))v(ch_\lambda)$，由于 Weyl 公式，它必须等于 $v(\partial\omega(\lambda+\delta))$．这就允许我们把 $\deg(\lambda)=v(ch_\lambda)$ 表示成商的形式．

稍加思索即可看出：$v(\partial\varepsilon_\delta)=\prod\limits_{\alpha>0}(\delta,\alpha)$；类似地，$v(\partial\varepsilon_{\sigma\delta})=\prod\limits_{\alpha>0}(\sigma\delta,\alpha)=\prod\limits_{\alpha>0}(\delta,\sigma^{-1}\alpha)$．但回想一下，被 $\sigma^{-1}$ 从正根变成负根的个数是 $l(\sigma^{-1})=l(\sigma)$（见(10.3)引理 A），所以这恰好是 $sn(\sigma)\prod\limits_{\alpha>0}(\delta,\alpha)$，$sn(\sigma)=(-1)^{l(\sigma)}$．换句话说，

$$v(\partial\omega(\delta))=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)v(\partial\varepsilon_{\sigma\delta})=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)^2\prod_{\alpha>0}(\delta,\alpha)$$
$$=\mathrm{Card}(\mathscr{W})\prod_{\alpha>0}(\delta,\alpha).$$

对 $\omega(\lambda+\delta)$ 作同样论证，可得 $\mathrm{Card}(\mathscr{W})\prod\limits_{\alpha>0}(\lambda+\delta,\alpha)$．构成商式，可得：

**推论** 设 $\lambda\in\Lambda^+$，则 $\deg(\lambda)=\dfrac{\prod\limits_{\alpha>0}(\lambda+\delta,\alpha)}{\prod\limits_{\alpha>0}(\delta,\alpha)}$． ∎

为了计算一些例子，我们注意到当分子分母同乘以 $\prod\limits_{\alpha>0}\dfrac{2}{(\alpha,\alpha)}$ 后，可得

$$\deg(\lambda)=\frac{\prod\limits_{\alpha>0}\langle\lambda+\delta,\alpha\rangle}{\prod\limits_{\alpha>0}\langle\delta,\alpha\rangle}\text{（整数的商）}.$$

但 $\langle\lambda+\delta,\alpha\rangle=(\lambda+\delta,\alpha^\vee)$，$\alpha^\vee$ 是对偶根．又因 $\Delta^\vee$ 是 $\Phi^\vee$ 的基（练

习 10.1)，可写为 $\alpha^\vee=\sum_i c_i^{(\alpha)}\alpha_i^\vee$，所以 $\langle\lambda+\delta,\ \alpha\rangle=\sum_i c_i^{(\alpha)}\langle\lambda+\delta,\ \alpha_i\rangle$ $=\sum_i c_i^{(\alpha)}(m_i+1)\ (\lambda=\sum_i m_i\lambda_i)$. 因此我们只需计算整数 $c_i^{(\alpha)}$ (练习 7)即可.

例 对型 $A_1$，$\lambda_1=\frac{1}{2}\alpha=\delta$，公式变成：$\deg(\lambda)=m+1$，$\lambda=m\lambda_1$，参看定理 7.2.

在此集中注意于秩 2. 记 $\lambda=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$. 对型 $A_2$，正根是 $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_1+\alpha_2$. 故上述分母等于 $1\cdot1\cdot2$，而分子为 $(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)$. 对于 $B_2$ 和 $G_2$，其计算是类似的(为了与 § 11 相一致起见，对 $B_2$，取 $\alpha_2$ 为短根；对 $G_2$，取 $\alpha_1$ 为短根). 归纳起来(练习 7)得：

$(A_2)$ $\frac{1}{2}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)$

$(B_2)$ $\frac{1}{3!}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)(2m_1+m_2+3)$

$(G_2)$ $\frac{1}{5!}(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)(m_1+2m_2+3)(m_1+3m_2+4)(2m_1+3m_2+5)$

对于 $G_2$，$\deg(\lambda_2)=14$. 因为 $\lambda_2=3\alpha_1+2\alpha_2$ 是最高根，故 $V(\lambda_2)$ 可看作伴随表示的模. $\deg(\lambda_1)=7$，这里的 $V(\lambda_1)$ 是 $\mathfrak{C}_0$ (即 Cayley 代数(19.3)的迹 0 子空间).

## 24.4. Steinberg 公式

我们可将 Kostant 公式及 Weyl 公式联合起来，以得出张量积 $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ 内 $V(\lambda)$ 出现的次数的公式(它属于 R. Steinberg). 根据有限维 $L$-模完全可约性的 Weyl 定理(6.3)，如果 $\lambda',\ \lambda''\in\Lambda^+$，我们可把 $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$ 写成某些 $V(\lambda)$ 的直和，每一个出现 $n(\lambda)$ 次(若 $V(\lambda)$ 根本不出现，则 $n(\lambda)=0$). 张量积的形式特征标就等于 $\sum_{\lambda\in\Lambda^+}n(\lambda)ch_\lambda$. 另一方面，在(22.5)中已证明，这一形式特征标等于 $ch_{\lambda'}*ch_{\lambda''}$. 所以

$$ch_{\lambda'} * ch_{\lambda''} = \sum_{\lambda} n(\lambda) ch_{\lambda}. \tag{1}$$

同前面一样，对于 $\mu \in \Lambda^+$，把 $\sum_{\sigma \in \mathscr{W}} sn(\sigma) \varepsilon_{\sigma(\mu+\delta)}$ 简写为$\omega(\mu+\delta)$. 如果在(1)的两边同乘以 $\omega(\delta)$，且分别对 $\lambda''$, $\lambda$ 使用 Weyl 公式(24.3)，即可得到：

$$ch_{\lambda'} * \omega(\lambda''+\delta) = \sum_{\lambda} n(\lambda) \omega(\lambda+\delta). \tag{2}$$

然后再写出 $ch_{\lambda'} = \sum_{\mu} m_{\lambda'}(\mu) \varepsilon_{\mu}$，且把 $m_{\lambda'}(\mu)$换成它在 Kostant 公式里的值(24.2). 等式(2)就变成：

$$\sum_{\mu} \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} sn(\sigma) p(\mu+\delta-\sigma(\lambda'+\delta)) \varepsilon_{\mu} * \omega(\lambda''+\delta) = \sum_{\lambda} n(\lambda) \omega(\lambda+\delta). \tag{3}$$

利用 $\omega(\lambda''+\delta)$的表达式，即得：

$$\sum_{\mu} \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \sum_{\tau \in \mathscr{W}} sn(\sigma\tau) p(\mu+\delta-\sigma(\lambda'+\delta)) \varepsilon_{\tau(\lambda''+\delta)+\mu} = \sum_{\lambda} \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} n(\lambda) sn(\sigma) \varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}. \tag{4}$$

为了对(4)的两边作比较，首先把变量作替换. 在右边，用 $\nu$ 代替 $\lambda$，这里 $\sigma(\lambda+\delta) = \nu+\delta$，得到：

$$\sum_{\nu} \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} sn(\sigma) n(\sigma(\nu+\delta)-\delta) \varepsilon_{\nu+\delta}. \tag{5}$$

在左边，用 $\nu$ 代替 $\mu$，这里 $\tau(\lambda''+\delta)+\mu = \nu+\delta$，得到：

$$\sum_{\nu} \sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \sum_{\tau \in \mathscr{W}} sn(\sigma\tau) p(\nu+2\delta-\sigma(\lambda'+\delta)-\tau(\lambda''+\delta)) \varepsilon_{\nu+\delta}. \tag{6}$$

现在设 $\nu$ 是支配的. 则除了 $\sigma=1$ 外，$\sigma(\nu+\delta)-\delta$ 不可能是支配的(练习 13.10). 所以除 $\sigma=1$ 外，$n(\sigma(\nu+\delta)-\delta)=0$，这意味着(5)里面的 $\varepsilon_{\nu+\delta}$ 的系数恰好是 $n(\nu)$. 由于(6)，我们可证得：

**定理** (Steinberg) 设 $\lambda'$, $\lambda'' \in \Lambda^+$，则在 $V(\lambda') \otimes V(\lambda'')$ 内，$V(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda^+)$ 出现的次数由下式给出：

$$\sum_{\sigma \in \mathscr{W}} \sum_{\tau \in \mathscr{W}} sn(\sigma\tau) p(\lambda+2\delta-\sigma(\lambda'+\delta)-\tau(\lambda''+\delta)). \quad \blacksquare$$

这公式(类似于 Kostant 公式)看起来十分清晰，但当 Weyl 群很大时，并不便于应用. 在练习 9 里引伸出一个更实用的公式.

## 练 习

1．对型 $A_1$ 给出 Weyl 特征标公式(24.3)的直接证明.

2．使用 Weyl 维数公式，证明：有最小可能维数的一一不可约有限维 $L$-模的首权是某个 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant l)$.

3．使用 Kostant 公式验证(22.4) 例 1 内列出的一些重数，且把那里的 $ch_\lambda$ 与 Weyl 公式给出的表达式相比较.

4．对特殊情形 $A_1$，把 Steinberg 公式与 Clebsch-Gordan 公式（练习 22.7)相比较.

5．使用 Steinberg 公式把 $G_2$-模 $V(\lambda_1)\otimes V(\lambda_2)$ 分解成不可约分量．再利用 Weyl 公式来验证这些维数的和正是 $\dim V(\lambda_1)\cdot\dim V(\lambda_2)$.

6．设 $L=\mathfrak{s}\mathfrak{l}(3, F)$．把 $\lambda=m_1\lambda_1+m_2\lambda_2$ 简记为$(m_1, m_2)$．使用 Steinberg 公式验证：$V(1, 0)\otimes V(0, 1)\cong V(0, 0)\oplus V(1, 1)$.

7．验证 (24.3) 内的维数公式．对型 $C_3$ 推导一个这样的公式．在一般情况下，如何找出整数 $c_i^{(\alpha)}$?

8．设 $\lambda\in\Lambda$．如果在 $\mathscr{W}$ 内存在 $\sigma\neq 1$ 使 $\lambda$ 不变，证明 $\sum\limits_{\sigma(\lambda)=\lambda} sn(\sigma)\varepsilon_{\sigma(\lambda)}=0$.
[利用 $\lambda$ 位于某一 Weyl 房的闭包内但不在它的内部这一事实，找出一个使 $\lambda$ 不变的反射，再由此推导出使 $\lambda$ 不变的群有偶数阶．]

9．本练习的目的，是得到一个张量积的另一种分解式，这个公式的基础，是假定对其中一个模的权已有清楚的了解．如同 (24.4)，从等式(2) $ch_{\lambda'}*\omega(\lambda''+\delta)=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^+} n(\lambda)\omega(\lambda+\delta)$出发，把左边的 $ch_{\lambda'}$ 换成 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} m_{\lambda'}(\lambda)\varepsilon_\lambda$，再利用 $\mathscr{W}$ 置换 $V(\lambda')$的权空间这一事实，得到$\sum\limits_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\sum\limits_{\lambda} m_{\lambda'}(\lambda)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\lambda''+\delta)}$．然后证明(2)的右边可以表示成$\sum\limits_{\sigma\in\mathscr{W}} sn(\sigma)\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^+} n(\lambda)\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}$．再如下定义 $t(\mu)$：若 $\mathscr{W}$ 的某一元素 $\sigma\neq 0$ 使 $\mu$ 不变，则为 0；如果只有 1 使 $\mu$ 不变，且若 $\sigma(\mu)$是支配的，则定义为 $sn(\sigma)$．于是从练习 8 可推出：

$$ch_{\lambda'}*ch_{\lambda''}=\sum_{\lambda\in\Pi(\lambda')} m_{\lambda'}(\lambda)t(\lambda+\lambda''+\delta)\,ch_{(\lambda+\lambda''+\delta)-\delta}.$$

(这里花括号代表与括号里的权共轭的唯一支配权.)

10．利用练习 9 的方法重做练习 5, 6.

11．使用练习 6 的记号，验证 $V(1, 1)\otimes V(1, 2)\cong V(2, 3)\oplus V(3, 1)\oplus V(0, 4)\oplus V(1, 2)\oplus V(1, 2)\oplus V(2, 0)\oplus V(0, 1)$.

12．从 Steinberg 公式推导出：使得 $V(\lambda)$可能出现在 $V(\lambda')\otimes V(\lambda'')$的

加项中的$\lambda\in\Lambda^+$，只能是形如$\mu+\lambda''$，$\mu\in\Pi(\lambda')$的. 当这样的$\mu+\lambda''$都是支配权时，从练习9推导出$V(\mu+\lambda'')$确实出现在张量积内，且重数为$m_{\lambda'}(\mu)$. 利用这些事实，对型$A_2$分解$V(1, 3)\otimes V(4, 4)$. (参见(22.4)的例1.)

13. 取定正根的一个和式$\pi$，证明对所有足够大的$n$，有$m_{n\delta}(n\delta-\pi)=p(-\pi)$.

【附注】

Weyl的原始证明使用了紧致李群上的积分，以后Freudenthal给出了一个更代数化(但不那么直观)的证明：见Freudenthal-de Vries[1]，Jacobson[1]，Samelson[1]. 这里的处理方法是Verma[1]的工作中所建议的，而且相当紧密地仿照了Bernstein, Gel'fand, Gel'fand[1]最近的论文. 关于Kostant公式的原始证明(相当复杂)可见Kostant[1]，使其简化的评论请参看Cartier[1]. Steinberg公式在Steinberg[1]内被简要地推导出来. 练习9内扼要叙述的张量积的处理方法是属于Brauer[2]的，参见Klimyk[1]. 练习12是以Kostant[1]为基础的.

# 附　　录

在证明Weyl公式与Kostant公式时，曾求助于§23的关于中心特征标的结果. 如果想要对所有的$\lambda\in H^*$证明命题24.2的话，看来这是不可避免的. 但实际上只需用到整权的情形，对它们来说，只要Casimir元素(而不是$\mathfrak{U}(L)$的整个中心)就能提供足够的信息. 在V. G. Kac[1]关于Macdonald公式(参看Garland, Lepowsky[1])的工作中可以看出使上述证明更加精简是有可能的. 不过，应该强调的是，对于无限维表示理论中的某些论题(如象Harish-Chandra对离散序列所做的工作)来说，§23是必不可少的.

以下是对Weyl公式修改后的证明方法的详细概要：

(1) 回忆(22.1)中$\mathfrak{U}(L)$内Casimir元素$c=c_L$的构造：$c=\sum_{i=1}^{l}h_ik_i+\sum_{\alpha\in\Phi}x_\alpha z_\alpha$，这里$L$关于Killing型的对偶基已用特殊的形式被选取. (实际上，不管怎样选取对偶基都可导致同一个元素$c$.) 如同(23.2)中所指出的，$c$位于$\mathfrak{U}(L)$的中心内，所以在任一标准循环模上的作用相当于一个纯量.

(2) 让我们计算当$c$作用在由极大向量$v^+$生成的首权为$\lambda\in H^*$的标准循环模上所相当的纯量(见练习23.4). 若$\alpha\prec 0$，则$z_\alpha\cdot v^+=0$，而若$\alpha\succ 0$，可

改写为 $x_\alpha z_\alpha = z_\alpha x_\alpha + t_\alpha$，且 $x_\alpha \cdot v^+ = 0$，所以 $x_\alpha z_\alpha \cdot v^+ = t_\alpha \cdot v^+ = (\lambda, \alpha) v^+$。另一方面，在(22.3)的开头已证明了 $\sum_{i=1}^{l} \lambda(h_i)\lambda(k_i) = (\lambda, \lambda)$。把这些结果放在一起，再回想起 $2\delta = \sum_{\alpha\succ 0} \alpha$，我们发现 $c$ 作用在 $v^+$ 上相当于纯量 $(\lambda, \lambda) + \sum_{\alpha\succ 0}(\lambda, \alpha) = (\lambda, \lambda) + 2(\lambda, \delta) = (\lambda+\delta, \lambda+\delta) - (\delta, \delta)$。

(3) 现在可证明命题 24.2 的另一种说法了。设 $Z$ 是首权为 $\lambda \in \Lambda$ 的标准循环模。我们可断定 $Z$ 有一个合成列，其合成因子是形如 $V(\mu)$ 的，其中 $\mu \prec \lambda$ 满足：

$$(\mu+\delta, \mu+\delta) = (\lambda+\delta, \lambda+\delta). \tag{*}$$

由于 $\Lambda$ 是离散的，而满足(*)的 $\mu \in \mathrm{E}$ 的集合是紧致的，故 $Z$ 中只有有限多个权 $\mu$ 满足(*)。令 $d = \sum \dim Z_\mu$(在所有这样的 $\mu$ 上求和)，则因 $Z$ 的权空间是有限维的，故 $d$ 为有限的。再对 $d$ 使用归纳法。

假设 $d=1$。若 $Z$ 有真非零子模 $W$，则 $W$ 是它的权空间之和(20.2)，所以具有一个权为 $\mu \prec \lambda$，$\mu \neq \lambda$ 的极大向量。按第(2)步所述，$c$ 作用在这个极大向量上相当于纯量 $(\mu+\delta, \mu+\delta) - (\delta, \delta)$，而它作用在 $Z$ 上相当于纯量 $(\lambda+\delta, \lambda+\delta) - (\delta, \delta)$。于是 $\mu$ 满足(*)，这与 $d=1$ 矛盾。换句话说，$Z$ 是不可约的，故 $Z \cong V(\lambda)$ (20.3)，此时没有什么要证的。

归纳法的步骤可类似进行。除去 $Z$ 是不可约模以外，$Z$ 总包含一个真子模 $W$，它是某个满足(*)的权 $\mu \prec \lambda$ 的标准循环模。然后把归纳法假设可应用于标准循环模 $Z/W$ 及 $W$，以得到所需类型的合成列，它们合在一起即可导出 $Z$ 的合成列。

(4) 如同(24.1)，可使用形式特征标把一个模表成它的合成因子之"和"。把 $ch_{V(\lambda)}$ 简写为 $ch_\lambda$，$ch_{Z(\lambda)}$ 简写为 $ch'_\lambda$。固定 $\lambda \in \Lambda^+$ 且考虑满足上述(*)式的 $\mu \in \Lambda$ 的(有限)集合。这个集合可被排成 $(\mu_1, \cdots, \mu_t)$ 的次序，使 $\mu_i \prec \mu_j$ 意味着 $i \leqslant j$。然后，由(3)可写出 $ch'_{\mu_j} = \sum_{i\leqslant j} a_{ij} ch_{\mu_i}$ $(a_{ij} \in \mathbf{Z}^+,\ a_{jj}=1)$。若对 $i>j$，置 $a_{ij}=0$，其结果所得到的矩阵 $(a_{ij})$ 是上三角阵，并且对角线元素都是 1，从而它在 $\mathbf{Z}$ 上是可逆的。这意味着 $ch_{\mu_j}$ 可被表示成 $ch'_{\mu_i} (i \leqslant j)$ 的 $\mathbf{Z}$-线性组合。作为其特例：

$$ch_\lambda = \sum c(\mu) ch'_\mu, \tag{**}$$

此和式取遍满足(*)式的 $\mu \prec \lambda$，且 $c(\lambda) = 1$。

(5) 如同(24.1)内所作的那样，导出联系函数 $p$，$q$，$ch'_\mu$ 的各种公式。请注意 $\sigma \in \mathscr{W}$ 使 $ch_\lambda$ 固定(定理 21.2)，而 $\sigma q = sn(\sigma) q$(引理 B)。

(6) 为了从上面的(**)式推导出 Weyl 公式(或 Kostant 公式)，只需证

明使 $c(\mu)\neq0$ 的 $\mu$ 只可能是形如 $\mu=\sigma(\lambda+\delta)-\delta\,(\sigma\in\mathscr{W})$ 的，且 $c(\mu)=sn(\sigma)$. (以后的论证就可按(24.2),(24.3)那样继续进行下去.)首先把(**)的两边乘以 $q$，然后使用引理 E 以得到: $q*ch_\lambda=\sum c(\mu)\varepsilon_{\mu+\delta}$. 用 $\sigma\in\mathscr{W}$ 作用于等式两边，左边相当于乘以 $sn(\sigma)$，而右边变成 $\sum c(\mu)\,\varepsilon_{\sigma(\mu+\delta)}$. 从而使 $c(\mu)\neq0$ 的权 $\mu+\delta$ 的集合是 $\mathscr{W}$-稳定的，而且在同一个轨道内的系数仅相差 $\pm1$ 倍. 如果把此等式改写，使它分别在各个 $\mathscr{W}$-轨道上求和，并且利用 $c(\lambda)=1$ 这一事实，可得:

$$q*ch_\lambda=\sum_{\sigma\in\mathscr{W}}sn(\sigma)\,\varepsilon_{\sigma(\lambda+\delta)}+S.$$

剩下的是说明和 $S$ 是空的. 如果不是这样，由于 $\Lambda$ 内每个 $\mathscr{W}$-轨道都与 $\Lambda^+$ 相交(引理 13.2A)，故必存在 $\mu\prec\lambda$, $\mu\neq\lambda$，使得 $\mu+\delta\in\Lambda^+$，并且 $\mu$ 满足(*). 但只要把引理 13.4C 的证明应用于这种情形，就迫使 $\mu=\lambda$，这是荒谬的.

# 第七章　Chevalley 代数与 Chevalley 群

这里的记号与前几章相同. $L$ 是特征数 0 的代数闭域 F 上的半单纯李代数, $H$ 是 CSA, $\Phi$ 是根系.

这一章我们看怎样在"$\mathbf{Z}$"上"构造 $L$ 及其不可约表示. 当 $L$ 是典型李代数时, 这样做的可能性是相当明显的. 这里所得到的结果实际上要超出许多, 它使得我们能构造"Chevalley 群"以及这些群在任意域上的表示. 这是一个很大的题目, 在此只能向读者作一导引.

## 25. $L$ 的 Chevalley 基

### 25.1. 根　偶

在(25.2)内将证明, $L$ 具有一个结构常数都是整数的基. 但首先必须建立一些关于根偶 $\alpha$, $\beta$($\alpha+\beta$ 也是根)的性质, 在做这一工作时, 必须要始终注视着等式 $[x_\alpha x_\beta]=c_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}$. 以下的命题只依赖于根系 $\Phi$(不依赖于 $L$).

**命题**　设 $\alpha$, $\beta$ 是线性无关的根, $\beta-r\alpha, \cdots, \beta, \cdots, \beta+q\alpha$ 是经过 $\beta$ 的 $\alpha$-链. 则:

(a) $\langle\beta, \alpha\rangle=r-q$.

(b) 在这一链内至多出现两种根长度.

(c) 若 $\alpha+\beta\in\Phi$, 则 $r+1=\dfrac{q(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}{(\beta, \beta)}$.

**证**　(a) 这已在(9.4)内证明了(在命题 8.4(e)中, 利用 $\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 的表示理论也被证明过).

(b) $\Phi'=(\mathbf{Z}\alpha+\mathbf{Z}\beta)\cap\Phi$ 是秩 2 的根系(在由 $\alpha$, $\beta$ 张成的 E 的

子空间内)：见练习 9.7. 如果它是可约的，则必定是型 $A_1\times A_1$ 的，即 $\Phi'=\{\pm\alpha,\ \pm\beta\}$，此时没有什么可证的. 如果是不可约的，$\Phi'=A_2,\ B_2$ 或 $G_2$，就可得到上面的结果(或者，使用引理 10.4C).

(c) 可通过验看秩 2 的根系而得到(练习 1). 但是以下的几何论证可在一般情况下实行. 首先，从(a)推导得：

$$\begin{aligned}
&(r+1)-\frac{q(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta)}{(\beta,\ \beta)}\\
&=q+\frac{2(\beta,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}+1-\frac{q(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta)}{(\beta,\ \beta)}\\
&=\frac{2(\beta,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}+1-\frac{q(\alpha,\ \alpha)}{(\beta,\ \beta)}-\frac{2q(\alpha,\ \beta)}{(\beta,\ \beta)}\\
&=(\langle\beta,\ \alpha\rangle+1)\left(1-\frac{q(\alpha,\ \alpha)}{(\beta,\ \beta)}\right).
\end{aligned}$$

把这一乘积的两个因子记为 $A,\ B$. 在此必须证明两者之一是 0. 这里关于 $\alpha,\ \beta$ 是不对称的，所以两种情形必须分别讨论：

情形 i：$(\alpha,\ \alpha)\geqslant(\beta,\ \beta)$. 则 $|\langle\beta,\ \alpha\rangle|\leqslant|\langle\alpha,\ \beta\rangle|$. 因为 $\alpha,\beta$ 是线性无关的，从(9.4)我们知道 $\langle\beta,\ \alpha\rangle\langle\alpha,\ \beta\rangle=0,\ 1,\ 2$ 或 3. 这个不等式迫使 $\langle\beta,\ \alpha\rangle=-1,\ 0$ 或 1. 在第一种情况，$A=0$，已经得证. 否则，$(\beta,\ \alpha)\geqslant0$，故 $(\beta+\alpha,\ \beta+\alpha)$ 严格地大于 $(\beta,\ \beta)$ 以及 $(\alpha,\ \alpha)$. 由于 $\alpha+\beta\in\Phi$，(b) 意味着 $(\alpha,\ \alpha)=(\beta,\ \beta)$. 类似地，$(\beta+2\alpha,\ \beta+2\alpha)>(\beta+\alpha,\ \beta+\alpha)$，所以(b)又意味着 $\beta+2\alpha\notin\Phi$，即 $q=1$，迫使 $B=0$.

情形 ii：$(\alpha,\ \alpha)<(\beta,\ \beta)$. 则 $(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta)=(\alpha,\ \alpha)$ 或 $(\beta,\ \beta)$ (据(b))，无论哪种情形都迫使 $(\alpha,\ \beta)<0$ (所以 $\langle\alpha,\ \beta\rangle<0$). 因而 $(\beta-\alpha,\ \beta-\alpha)>(\beta,\ \beta)>(\alpha,\ \alpha)$，所以 $\beta-\alpha\notin\Phi$ (仍根据(b))，即 $r=0$. 同前面一样，$\langle\alpha,\ \beta\rangle\langle\beta,\ \alpha\rangle=0,\ 1,\ 2$ 或 3，但这里我们有 $|\langle\alpha,\ \beta\rangle|<|\langle\beta,\ \alpha\rangle|$，迫使 $\langle\alpha,\ \beta\rangle=-1,\ 0$ 或 1. 我们又知道 $\langle\alpha,\ \beta\rangle<0$，故 $\langle\alpha,\ \beta\rangle=-1$. 由(a)，$q=-\langle\beta,\ \alpha\rangle=\dfrac{\langle\beta,\ \alpha\rangle}{\langle\alpha,\ \beta\rangle}=\dfrac{(\beta,\ \beta)}{(\alpha,\ \alpha)}$，所以 $B=0$. ∎

## 25.2. Chevalley 基的存在性

**引理** 设 $\alpha$, $\beta$ 是线性无关的根. 选取 $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$, 使得 $[x_\alpha x_{-\alpha}] = h_\alpha$, 且设 $x_\beta \in L_\beta$ 是任意的. 则若 $\beta - r\alpha$, $\cdots$, $\beta + q\alpha$ 是经过 $\beta$ 的 $\alpha$-链, 我们就有 $[x_{-\alpha}[x_\alpha x_\beta]] = q(r+1)x_\beta$. ($h_\alpha$ 的定义见命题 8.3.)

**证** 若 $\alpha + \beta \notin \Phi$, 则 $q=0$, 且 $[x_\alpha x_\beta] = 0$, 所以上面等式的两边都等于 0. 在一般情况下, 如在(22.2)里对任意表示所做的那样, 可以利用 $S_\alpha (\cong \mathfrak{sl}(2, \mathsf{F}))$ 在 $L$ 上的伴随表示. 也就是说, 由 $x_\beta$ 生成的 $L$ 的 $S_\alpha$-子模的维数是 $r+q+1$ (即经过 $\beta$ 的 $\alpha$-链中的根数), 首权是 $r+q$. 按照引理 7.2 的记号, $x_\beta$ 是 $v_q$ 的非零倍, 并且逐次运用 $\operatorname{ad} x_\alpha$, $\operatorname{ad} x_{-\alpha}$ 倍增在 $v_q$ 上 (对 $x_\beta$ 也一样) 正如乘上纯量 $q(r+1)$. ∎

**命题** 可以选择根向量 $x_\alpha \in L_\alpha (\alpha \in \Phi)$, 使它们满足:

(a) $[x_\alpha x_{-\alpha}] = h_\alpha$.

(b) 若 $\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta \in \Phi$, $[x_\alpha x_\beta] = c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, 则 $c_{\alpha\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$. 对于这样选取的根向量, 纯量 $c_{\alpha\beta}$ ($\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta \in \Phi$) 自动地满足:

(c) $c_{\alpha\beta}^2 = q(r+1)\dfrac{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}{(\beta, \beta)}$, 在这里 $\beta - r\alpha$, $\cdots$, $\beta + q\alpha$ 是经过 $\beta$ 的 $\alpha$-链.

**证** 回想一下(命题 14.3) $L$ 有一个 2 阶自同构 $\sigma$, 它把 $L_\alpha$ 映到 $L_{-\alpha} (\alpha \in \Phi)$, 且作用在 $H$ 上相当于用 $-1$ 作乘法. 对任意非零的 $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_{-\alpha} = -\sigma(x_\alpha) \in L_{-\alpha}$ 也是非零的, 且 $\kappa(x_\alpha, x_{-\alpha}) \neq 0$ ($\kappa$ 是 Killing 型). 把 $x_\alpha$ 换成 $cx_\alpha (c \in \mathsf{F})$ 就把这个值乘上 $c^2$. 由于 $\mathsf{F}$ 是代数闭的, 所以能够修改 $c$ 的取法, 使得 $\kappa(x_\alpha, x_{-\alpha})$ 取任意指定的非零值. 在此规定 $\kappa(x_\alpha, x_{-\alpha}) = \dfrac{2}{(\alpha, \alpha)}$. 按照命题 8.3(c), 迫使 $[x_\alpha x_{-\alpha}] = h_\alpha \left( = \dfrac{2t_\alpha}{(\alpha, \alpha)} \right)$. 对于每一对根偶 $\{\alpha, -\alpha\}$, 都按上述方法取定 $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}$, 于是(a)被满足.

现在设 $\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta \in \Phi$, 所以 $[x_\alpha x_\beta] = c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, 这里的 $c_{\alpha\beta} \in \mathsf{F}$.

施加$\sigma$于等式的两端，就得到$[-x_{-\alpha}, -x_{-\beta}]=-c_{\alpha\beta}x_{-\alpha-\beta}$. 另一方面，$[x_{-\alpha}x_{-\beta}]=c_{-\alpha,-\beta}x_{-\alpha-\beta}$，从而得到(b).

设已经选好满足(a)，(b)的根向量$\{x_\alpha, \alpha\in\Phi\}$，考虑$\alpha, \beta, \alpha+\beta\in\Phi$的情形(特别是$\alpha$与$\beta$，从而$t_\alpha$与$t_\beta$(见(8.2))是线性无关的). 由于$t_{\alpha+\beta}=t_\alpha+t_\beta$，从(a)可得$[c_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}, c_{\alpha\beta}x_{-\alpha-\beta}]=c_{\alpha\beta}^2h_{\alpha+\beta}=\dfrac{2c_{\alpha\beta}^2}{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}(t_\alpha+t_\beta)$. 另一方面，(b)意味着左边也等于$-[[x_\alpha x_\beta][x_{-\alpha}x_{-\beta}]]=-[x_\alpha[x_\beta[x_{-\alpha}x_{-\beta}]]]+[x_\beta[x_\alpha[x_{-\alpha}x_{-\beta}]]]=[x_\alpha[x_\beta[x_{-\beta}x_{-\alpha}]]]+[x_\beta[x_\alpha[x_{-\alpha}x_{-\beta}]]]$. 设经过$\alpha$的$\beta$-链是$\alpha-r'\beta, \cdots, \alpha+q'\beta$. 则上述引理可应用于每一个项(把$\alpha, \beta$换成它们的负元后，这并不影响$r, q, r', q'$)，得到：$q'(r'+1)[x_\alpha x_{-\alpha}]+q(r+1)[x_\beta x_{-\beta}]=\dfrac{2q'(r'+1)}{(\alpha, \alpha)}t_\alpha+\dfrac{2q(r+1)}{(\beta, \beta)}t_\beta$. 利用$t_\alpha$和$t_\beta$的线性无关性，将这里的系数与前面的系数相比较，即可得到(c). ▌

现在我们可以构造$L$的**Chevalley基**. 作为定义，Chevalley基就是任意一个基$\{x_\alpha, \alpha\in\Phi; h_i, 1\leqslant i\leqslant l\}$，只要其中$x_\alpha$满足上述命题的(a)，(b)，并且$h_i=h_{\alpha_i}$，这里$\Delta=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$是$\Phi$的某一个基.

**定理**(Chevalley) 设$\{x_\alpha, \alpha\in\Phi; h_i, 1\leqslant i\leqslant l\}$是$L$的一个Chevalley基，则它的结构常数都在$\mathbf{Z}$内. 更精确地说:

(a) $[h_ih_j]=0, 1\leqslant i, j\leqslant l$.

(b) $[h_ix_\alpha]=\langle\alpha, \alpha_i\rangle x_\alpha, 1\leqslant i\leqslant l, \alpha\in\Phi$.

(c) $[x_\alpha x_{-\alpha}]=h_\alpha$是$h_1, \cdots, h_l$的$\mathbf{Z}$-线性组合.

(d) 若$\alpha, \beta$为线性无关根，$\beta-r\alpha, \cdots, \beta+q\alpha$是经过$\beta$的$\alpha$-链，则

$$[x_\alpha x_\beta]=\begin{cases}0, & 若\ q=0;\\ \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}, & 若\ \alpha+\beta\in\Phi.\end{cases}$$

**证** (a)是显然的. (b)可从$\alpha(h_i)=\langle\alpha, \alpha_i\rangle$得出. 至于(c)，回忆一下对偶根$\alpha^\vee=\dfrac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$形成一个根系，且其基为$\Delta^\vee=\{\alpha_1^\vee,$

$\cdots, \alpha_l^\vee\}$ (练习 10.1). 在 Killing 型之下把 $H$ 与 $H^*$ 等同起来，则 $t_\alpha$ 对应于 $\alpha$; $h_\alpha$ 对应于 $\alpha^\vee$. 因为每一个 $\alpha^\vee$ 是 $\Delta^\vee$ 的 $\mathbf{Z}$-线性组合，故每个 $h_\alpha$ 是 $h_1, \cdots, h_l$ 的 $\mathbf{Z}$-线性组合. 最后，(d)可从前述命题(c)再结合命题 25.1 的(c)而得出. ∎

读者可能会感到奇怪的是，在 Chevalley 基的定义中，为什么要求 $c_{\alpha\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$ 而不要求 $c_{\alpha\beta} = c_{-\alpha,-\beta}$? 而在实际上，这一反对称性是必然存在的：因为在给出命题的条件 (a) 后，通过应用 Jacobi 等式，可以证明 $c_{\alpha\beta}c_{-\alpha,-\beta} = -(r+1)^2$，这就意味着除非具有上述命题的条件(b)，否则定理的条件(d)是不可能成立的.（这正是 Chevalley 的原始证明的思路.）读者可以验证（练习 2）：把在 (1.2) 内所给出的典型代数的基，作些适当修改后，就能得到 Chevalley 基. Chevalley 定理有这样的优点：它既给出了 Chevalley 基的存在性的证明，又指出了怎样从根系得出结构常数来.

## 25.3. 唯一性问题

Chevalley 基具有怎样的唯一性？一旦 $\Delta$ 被确定后，$h_i$ 也就完全确定了. 另一方面，略微变换一下 $x_\alpha$ 的选择，譬如说，把 $x_\alpha$ 换成 $\eta(\alpha)x_\alpha$ $(\alpha\in\Phi)$ 是容许的. 此时 $[\eta(\alpha)x_\alpha, \eta(-\alpha)x_{-\alpha}] = \eta(\alpha)\eta(-\alpha)h_\alpha$，所以必定有 $\eta(\alpha)\eta(-\alpha)=1$ (*)，以满足命题 25.2 的条件(a). 如果 $\alpha, \beta, \alpha+\beta\in\Phi$，则 $[\eta(\alpha)x_\alpha, \eta(\beta)x_\beta] = \eta(\alpha)\eta(\beta)[x_\alpha x_\beta] = c_{\alpha\beta}\eta(\alpha)\eta(\beta)x_{\alpha+\beta} = c'_{\alpha\beta}\eta(\alpha+\beta)x_{\alpha+\beta}$，这里的 $c'_{\alpha\beta} = \dfrac{c_{\alpha\beta}\eta(\alpha)\eta(\beta)}{\eta(\alpha+\beta)}$. 为满足命题 25.2 的(b)，使用 (*) 作类似的计算，可证明也必定有 $c'_{\alpha\beta} = \dfrac{c_{\alpha\beta}\eta(\alpha+\beta)}{\eta(\alpha)\eta(\beta)}$，或者，$\eta(\alpha)\eta(\beta) = \pm\eta(\alpha+\beta)$ (**). 反之，任一满足(*)和(**)的函数 $\eta: \Phi\to F$ 可以被用来改变 $x_\alpha$ 的取法.

符号的问题复杂得多. 我们有 $[x_\alpha x_\beta] = \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$ $(\alpha, \beta, \alpha+\beta\in\Phi)$，但是用来建立这一等式的论证却没有解决正负号问题. 这并不是偶然的，读者可从选取 $\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 代替 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 作为

$\mathfrak{sl}(3, \mathsf{F})$的 Chevalley 基的基元素看出来：偏爱重视某一种选取是没有必要的. 有一种算法使得符号可相容地选取，这仅仅是以关于 $\Phi$ 的知识为基础的，并且它还可以导致同构定理 (14.2, 18.4) 的另一个证明 (见本节后面的附注). 当然，这样的证明将会是循环论证，除非自同构 $\sigma$ 的存在性已被独立地建立!

也可先把乘法表编出来，然后验证 Jacobi 等式以证明 $L$ 的存在性(18.4). 这样的证明已由 Tits 写出(见后面附注)，虽然在性质上它是“初等的”，但它与以 Serre 定理 (18.4) 为基础的证明相比，却是十分冗长的.

## 25.4. 用素数模的约化

一个 Chevalley 基$\{x_\alpha, h_i\}$的 $\mathbf{Z}$-张成 $L(\mathbf{Z})$ 是 $L$ 内的一个格，它与 $\Delta$ 的选取无关. 在由 $L$ 继承下来的方括号运算之下(它的封闭性可由定理 25.2 保证)，它甚至是 $\mathbf{Z}$ 上的李代数(在明显的意义下). 如果 $\mathbf{F}_p=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 是特征数 $p$ 的素域，则可定义张量积 $L(\mathbf{F}_p)=L(\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{F}_p$: $L(\mathbf{F}_p)$ 是 $\mathbf{F}_p$ 上向量空间，具有基 $\{x_\alpha\otimes 1, h_i\otimes 1\}$. 此外，$L(\mathbf{Z})$ 内的方括号运算诱导了 $L(\mathbf{F}_p)$ 上的一个自然李代数结构. 这一乘法表与定理 25.2 的那一个基本相同，不过整数都化成了 $\bmod p$.

如果 $\mathsf{K}$ 是 $\mathbf{F}_p$ 的任一扩域，则 $L(\mathsf{K})=L(\mathbf{F}_p)\otimes_{\mathbf{F}_p}\mathsf{K}=L(\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathsf{K}$ 从 $L(\mathbf{F}_p)$ 继承了基及李代数结构. 用这样的方法，对于一个二元组$(L, \mathsf{K})$，我们可以联系一个 $\mathsf{K}$ 上的李代数. 它的结构类似于 $L$. 我们称 $L(\mathsf{K})$ 为 Chevalley 代数. 尽管 $L(\mathbf{Z})$ 依赖于根向量 $x_\alpha$ 的取法，但是很容易看到 (练习 5)：它被 $L$ 确定到仅仅相差一个 ($\mathbf{Z}$ 上的)同构. 类似地，代数 $L(\mathsf{K})$ 仅依赖于二元组$(L, \mathsf{K})$ (可以相差一个同构).

为了使这些说明更直观起见，我们考虑 $L=\mathfrak{sl}(l+1, \mathsf{F})$. 显然 $L(\mathsf{K})$ 的乘法表与 $\mathfrak{sl}(l+1, \mathsf{K})$ 关于标准基(1.2)的乘法表是同样的，所以 $L(\mathsf{K})\cong\mathfrak{sl}(l+1, \mathsf{K})$. 从 $\mathsf{F}$ 转化到 $\mathsf{K}$ 时可能发生的仅有的变化是：$L(\mathsf{K})$ 可能不是单纯的：在这里，当 $\operatorname{char}\mathsf{K}$ 能除尽 $l+1$

时，它有一个一维中心，是由纯量阵构成(见练习 2.3 及下面的练习 8)。

## 25.5. Chevalley 群的构造(伴随型)

**命题** 设 $\alpha\in\Phi$, $m\in\mathbf{Z}^+$. 则 $(\operatorname{ad}x_\alpha)^m/m!$ 使 $L(\mathbf{Z})$ 不变.

**证** 只要证明 Chevalley 基的每一个元素被映回到 $L(\mathbf{Z})$ 中即可. 我们有 $(\operatorname{ad}x_\alpha)(h_i)=[x_\alpha h_i]=-\langle\alpha,\alpha_i\rangle x_\alpha\in L(\mathbf{Z})$，对于所有 $m\geqslant 2$，有 $(\operatorname{ad}x_\alpha)^m/m!(h_i)=0$. 类似地，$(\operatorname{ad}x_\alpha)(x_{-\alpha})=h_\alpha\in L(\mathbf{Z})$. $(\operatorname{ad}x_\alpha)^2/2\cdot(x_{-\alpha})=\frac{1}{2}[x_\alpha h_\alpha]=-x_\alpha\in L(\mathbf{Z})$，且对所有的 $m\geqslant 3$，有 $\frac{(\operatorname{ad}x_\alpha)^m}{m!}(x_{-\alpha})=0$. 对于 $m\geqslant 1$，当然有 $\frac{(\operatorname{ad}x_\alpha)^m}{m!}(x_\alpha)=0$. 剩下来要考虑的基元素是 $x_\beta$, $\beta\neq\pm\alpha$. 如果 $\beta-r\alpha,\cdots,\beta+q\alpha$ 是经过 $\beta$ 的 $\alpha$-链，则对于根 $\beta+\alpha,\beta+2\alpha,\cdots,\beta+q\alpha$ 来说，起着相当于 $r$ 的作用的整数是(相应地) $r+1, r+2,\cdots, r+q$. 所以

$$\frac{(\operatorname{ad}x_\alpha)^m}{m!}(x_\beta)=\pm\frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m)}{m!}x_{\beta+m\alpha}$$

(或 0，当 $\beta+m\alpha\notin\Phi$ 时)。

所涉及到的系数恰好是二项式系数 $\binom{r+m}{m}$，所以右边是 $x_{\beta+m\alpha}$ 的整数倍. ∎

这一命题有如下的意义：$L$ 是 $L$ 的伴随表示的模，且 $L(\mathbf{Z})$ 是 $L$ 内的一个格，它在自同态 $(\operatorname{ad}x_\alpha)^m/m!$ 下是不变的，从而也在 $\exp\operatorname{ad}x_\alpha=1+\operatorname{ad}x_\alpha+(\operatorname{ad}x_\alpha)^2/2!+\cdots$(因为 $\operatorname{ad}x_\alpha$ 幂零，故和式是有限的)之下不变. 相应于 Chevalley 基，$\operatorname{Int}L=G$ 可以看作为矩阵群. 由所有 $\exp\operatorname{ad}cx_\alpha$ $(\alpha\in\Phi, c\in\mathbf{Z})$ 生成的子群使 $L(\mathbf{Z})$ 不变，所以由整系数矩阵所组成(而且行列式是 1). 特别当 $p$ 是素数，$\mathbf{F}_p$ 是 $p$ 个元素的素域时，把所有的矩阵元素化成 $\operatorname{mod}p$ 后，可以得到 $\mathbf{F}_p$ 上的矩阵群，它作用在李代数 $L(\mathbf{F}_p)$ 上相当于一个自同构群，记为 $G(\mathbf{F}_p)$.

更一般地，设 $T$ 是不定元. 则由所有 $\exp\operatorname{ad}Tx_\alpha$ $(\alpha\in\Phi)$ 生成

的矩阵群是由系数在 $\mathbf{Z}[T]$ 内(且行列式为 1)的矩阵所组成，所以把 $T$ 换成 $\mathbf{F}_p$ 的任意扩域 K 的元素后，即可得到 K 上的矩阵群 $G(\mathsf{K})$. 这样一个群称为(**伴随型**)**Chevalley 群**. 当 K 为有限时，这个群是有限的，并且(除了少数例外)是单纯的. 通过证明这一结论，Chevalley 列举出了几个以前不知道的有限单群族.

## 练　习

1. 通过验看秩 2 的根系以证明命题 25.1(c). [注意 $\alpha$, $\beta$ 中的一个可设为素根.]

2. 如何改变 (1.2) 中列举的典型代数的基以得到 Chevalley 基? [见练习 14.7.]

3. 使用命题 25.2 的证明给出练习 9.10 的新证明.

4. 如果在 $\Phi$ 的每一不可约分支内只出现一种根长度 (即 $\Phi$ 的不可约分支是型 A, D, E 的)，证明在定理 25.2 内所有的 $c_{\alpha\beta}=\pm 1$(当 $\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta\in\Phi$ 时).

5. 证明在 $L$ 内选取不同的 Chevalley 基能导出 $\mathbf{Z}$ 上同构的李代数 $L(\mathbf{Z})$. ("$\mathbf{Z}$ 上同构"是和域上同构一样被定义.)

6. 对型 $\mathrm{B}_2$ 的代数，设正根为 $\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta$, $2\beta+\alpha$. 验证以下的等式正是从 Chevalley 基导出的结果(并且正负号是相容的):

$$
\begin{aligned}
&[h_\beta, x_\beta]=2x_\beta && [x_\beta, x_\alpha]=x_{\alpha+\beta}\\
&[h_\beta, x_\alpha]=-2x_\alpha && [x_\beta, x_{\alpha+\beta}]=2x_{2\beta+\alpha}\\
&[h_\beta, x_{\alpha+\beta}]=0 && [x_\beta, x_{-\alpha-\beta}]=-2x_{-\alpha}\\
&[h_\beta, x_{2\beta+\alpha}]=2x_{2\beta+\alpha} && [x_\beta, x_{-2\beta-\alpha}]=-x_{-\alpha-\beta}\\
&[h_\alpha, x_\beta]=-x_\beta && [x_\alpha, x_{-\alpha-\beta}]=x_{-\beta}\\
&[h_\alpha, x_\alpha]=2x_\alpha && [x_{\alpha+\beta}, x_{-2\beta-\alpha}]=x_{-\beta}\\
&[h_\alpha, x_{\alpha+\beta}]=x_{\alpha+\beta} && [h_\alpha, x_{2\beta+\alpha}]=0
\end{aligned}
$$

7. 设 $\mathsf{F}=\mathbf{C}$. 取定 $L$ 的一个 Chevalley 基，且设 $L'$ 是由元素 $\sqrt{-1}\,h_i$ $(1\leqslant i\leqslant l)$, $x_\alpha-x_{-\alpha}$ 以及 $\sqrt{-1}(x_\alpha+x_{-\alpha})$ $(\alpha\in\Phi^+)$ 所张成的 $L$ 的 $\mathbf{R}$-子空间. 证明这些元素构成了 $L$ 在 $\mathbf{C}$ 上的一个基(所以 $L\cong L'\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$)，而且 $L'$ 在方括号运算下是封闭的 (所以 $L'$ 是 $\mathbf{R}$ 上的李代数). 证明 $L'$ 的 Killing 型 $\kappa'$ 正好就是 $\kappa$ 在 $L'$ 上的限制，而且 $\kappa'$ 是负定的. ($L'$ 是 $L$ 的"紧致实形式"，它与一个紧致李群相关联.)

8. 设 $L=\mathfrak{sl}(l+1, \mathsf{F})$, K 是任一个特征数 $p$ 的域. 如果 $p\nmid l+1$, 则 $L(\mathsf{K})$ 是单纯的. 如果 $p=2$, $l=1$, 则 $L(\mathsf{K})$ 是可解的. 若 $l>1$, $p\mid l+1$, 则 $\operatorname{Rad} L(\mathsf{K})=Z(L(\mathsf{K}))$, 由纯量矩阵所组成.

9. 证明对于型 $\mathsf{A}_l$ 的 $L$, 得出的伴随型 Chevalley 群 $G(\mathsf{K})$ 同构于 $PSL(l+1, \mathsf{K})=SL(l+1, \mathsf{K})$ 模纯量(这些纯量是 K 内的 $l+1$ 次单位根).

10. 设 $L$ 是型 $\mathsf{G}_2$ 的, K 是特征数 3 的域. 证明 $L(\mathsf{K})$ 有一个 7-维理想 $M$(参看那些短根). 试描述 $L(\mathsf{K})$ 在 $L(\mathsf{K})/M$ 上的表示.

11. Chevalley 群 $G(\mathsf{K})$ 作用在 $L(\mathsf{K})$ 上, 相当于一个李代数自同构的群.

12. 在(19.3)中所列出的 $\mathsf{G}_2$ 的基是不是 Chevalley 基?

【附注】

本节的思想都来源于 Chevalley 的讨论班的文章[3]. 我们的处理是遵照 Steinberg [2]的讲演记录, 这是关于 Chevalley 群总貌的最好的原始资料. Carter[1], Curtis[1]对有限群作了很好的概观。关于选择 Chevalley 基的符号的算法由 Samelson [1] (第54页)作了描述。以详细地(但是初等地)研究符号为基础的存在定理的一种证明方法, 可见 Tits[1].

## 26. Kostant 定理

$L$, $H$, $\Phi$, $\Delta$ 同前. 并取定 $L$ 的一个 Chevalley 基 $\{x_\alpha,\ \alpha\in\Phi;\ h_i,\ 1\leqslant i\leqslant l\}$.

为了构造与 $L$ 的任意表示 $\phi$(不仅仅是 ad) 相关联的矩阵群, 我们必须在 $\mathfrak{U}(L)$ 内工作. 它的思想是: 在一个任意的(有限维) $L$-模里构造一个类似于 $L(\mathbf{Z})$ 的格, 它在所有自同态 $\phi(x_\alpha)^m/m!$ 之下保持不变. 这一构造将利用 $\mathfrak{U}(L)$ 的"$\mathbf{Z}$-形式", 它实际上正是 $\mathfrak{U}(L)$ 内由所有 $x_\alpha^m/m!$ $(\alpha\in\Phi)$ 生成的带 1 的子环.

### 26.1. 组合的一个引理

回想一下二项式系数 $\binom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$. 如果这里的 $n$ 被换成任一个交换结合 F-代数(带 1)的元素 $x$, 而所得到的表达式仍有意义, 且记为 $\binom{x}{k}$, $k\in\mathbf{Z}^+$. 与二项式系数的等式

$\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}$ (*)类似的公式仍然可用。当 $k$ 是负数时，我们照例认为$\binom{n}{k}$是 0，而$\binom{n}{0}=1$。

**引理** 设 $T_1, \cdots, T_l$ 是不定元，$f=f(T_1, \cdots, T_l)$ 是 F 上的多项式，使得当 $n_1, \cdots, n_l\in\mathbf{Z}$ 时，$f(n_1, \cdots, n_l)\in\mathbf{Z}$。则 $f$ 是多项式 $\binom{T_1}{b_1}\binom{T_2}{b_2}\cdots\binom{T_l}{b_l}$ 的 $\mathbf{Z}$–线性组合，其中 $b_1, \cdots, b_l\in\mathbf{Z}^+$，且 $b_i$ 不超过 $f$ 作为 $T_i$ 的多项式时的次数。

**证** 首先注意到结论是合理的，这是因为

$$\binom{T_i}{b_i}=\frac{T_i(T_i-1)\cdots(T_i-b_i+1)}{b_i!}$$

当 $T_i$ 换成整数时，确实取了整值。也注意到所给的多项式构成 $\mathsf{F}[T_1, \cdots, T_l]$ 的一个 F–基。

对 $l$ 以及对 $f$ 关于 $T_l$ 的次数作归纳法。如果 $f$ 是一个常数多项式，它必须是 $1=\binom{T_l}{0}$的整数倍，所以没有什么要证的。一般地，写 $f=\sum_{k=0}^{r}f_k(T_1, \cdots, T_{l-1})\binom{T_l}{k}$，这里 $r$ 是 $f$ 关于 $T_l$ 的次数，且 $f_k(T_1, \cdots, T_{l-1})\in\mathsf{F}[T_1, \cdots, T_{l-1}]$。在等式两边形式上用 $T_l+1$ 代 $T_l$，再相减。前述的等式(*)说明右边等于 $\sum_{k=0}^{r}f_k(T_1, \cdots, T_{l-1})\binom{T_l}{k-1}$，而左边是一个满足对 $f$ 的原始假设的多项式。重复这一过程 $r$ 次，直到右边除了$\binom{T_l}{r-r}=1$ 外其余的二项式系数都变为 0，而$\binom{T_l}{r-r}$正是 $f_r(T_1, \cdots, T_{l-1})$ 的系数。因此 $f_r$ 满足对 $f$ 的假设(它在 $\mathbf{Z}^{l-1}$ 上取整值)，但它的变量比 $f$ 少一个。根据归纳假设，$f_r$ 可以表示成所要求的形式。此外，$f-f_r(T_1, \cdots, T_{l-1})\binom{T_l}{r}$满足对 $f$ 的原始假设，但它对 $T_l$ 的次数$<r$，所以再一次使用归纳法即可完成证明。∎

## 26.2. 特殊情况：$\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$

在这一小节里，考虑特殊情况 $L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$，它带有标准

(Chevalley) 基 $x, y, h$. 以下的引理及其推论可导致在此情况下的 Kostant 定理的证明. 它将用在后面，以得到一般情况下的证明.

**引理** 若 $a, c\in\mathbf{Z}^+$, 则在 $\mathfrak{U}(L)$ 内有:

$$\frac{x^c}{c!}\frac{y^a}{a!}=\sum_{k=0}^{\min(a,c)}\frac{y^{a-k}}{(a-k)!}\binom{h-a-c+2k}{k}\frac{x^{c-k}}{(c-k)!}.$$

**证** 若 $a=0$ (或 $c=0$), 右边变成 $\frac{x^c}{c!}\left(\text{或 }\frac{y^a}{a!}\right)$. 若 $a=c=1$, 等式变成 $xy=yx+h$ (这是正确的). 一般地，对 $a$ 与 $c$ 施行归纳法. 首先, 设 $c=1$, 且对 $a$ 施行归纳法, 得到:

$$\begin{aligned}\frac{xy^a}{a!}&=\frac{xy^{a-1}}{(a-1)!}\frac{y}{a}\\&=\frac{y^{a-1}}{(a-1)!}\frac{xy}{a}+\frac{y^{a-2}}{(a-2)!}(h-a+2)\frac{y}{a}\\&=\frac{y^ax}{a!}+\frac{y^{a-1}h}{a!}+\frac{y^{a-1}h}{a(a-2)!}-\frac{2y^{a-1}}{a(a-2)!}-\frac{y^{a-1}}{a(a-3)!}\\&=\frac{y^ax}{a!}+\frac{y^{a-1}h}{(a-1)!}-\frac{y^{a-1}}{(a-2)!}\\&=\frac{y^ax}{a!}+\frac{y^{a-1}}{(a-1)!}(h-a+1),\end{aligned}$$

现在对 $c$ 运用归纳法，再联合运用 (26.1) 的等式 (*) 以及下述事实：对任一多项式 $f(T)$ 有 $xf(h)=f(h-2)x$ (使用关于 $m$ 的归纳法, 对多项式 $T^m$ 验证此结论. 参看以下的引理 26.3D). ▮

**推论** 对于 $b\in\mathbf{Z}^+$, $\binom{h}{b}$是在由所有$\frac{x^c}{c!}$ 以及 $\frac{y^a}{a!}(a, c\in\mathbf{Z}^+)$ 所生成的 $\mathfrak{U}(L)$ 的子环内.

**证** 若 $b=0$, 这是显然的. 所以可对 $b$ 施行归纳法. 在引理中选择 $a=c=b$, 右边变成 $\binom{h}{b}+\sum_{k=0}^{b-1}\frac{y^{b-k}}{(b-k)!}\binom{h-2b+2k}{k}\cdot\frac{x^{b-k}}{(b-k)!}$ (而且它落在 $\mathfrak{U}(L)$ 的上述子环内). 令 $k<b$, 多项式 $\binom{T-2b+2k}{k}$ ($T$ 是一个不定元) 显然在整数上取整值, 所以引理

26.1容许我们把它写成多项式$\binom{T}{j}$的$\mathbf{Z}$线性组合,其中$j\leqslant k(<b)$.利用对$b$的归纳法可知每一个$\binom{h}{j}$是在$\mathfrak{U}(L)$的上述子环内,所以$\binom{h}{b}$也是如此. ∎

### 26.3. 关于交换的引理

现在回到一般情况. 因为对每个$\alpha\in\Phi$, 3维单纯子代数$S_\alpha$的标准基可取成$L$内已选定的Chevalley基的一部分, 所以(26.2)的结果可以不受约束地应用于只涉及到$\pm\alpha$的情形. 现在的主要问题是处理线性无关的根偶.

**引理 A** 设$V$, $W$是$L$-模,带有相应的子群$A$, $B$. 如果$A$, $B$在所有自同态$\frac{x_\alpha^t}{t!}$ $(\alpha\in\Phi,\ t\in\mathbf{Z}^+)$下不变, 则$A\otimes B\subset V\otimes W$也是不变的.

**证** 回忆起$x_\alpha.(v\otimes w)=x_\alpha.v\otimes w+v\otimes x_\alpha.w$. 运用二项式展开,可以看到

$$\frac{x_\alpha^t}{t!}(v\otimes w)=\sum_{k=0}^{t}\left(\frac{x_\alpha^k}{k!}\cdot v\otimes\frac{x_\alpha^{t-k}}{(t-k)!}\cdot w\right).$$

若$v\in A$, $w\in B$,则右边的每一项都在$A\otimes B$之内. ∎

**推论** 设$L(\mathbf{Z})$ (同(25.4))是$L$的Chevalley基的$\mathbf{Z}$-张成. 则对$\alpha\in\Phi$, $t\in\mathbf{Z}^+$, $\frac{(\mathrm{ad}\,x_\alpha)^t}{t!}$使$L(\mathbf{Z})\otimes L(\mathbf{Z})\otimes\cdots\otimes L(\mathbf{Z})$不变.

**证** 利用命题25.5以及上面的引理. ∎

设$\Psi$是$\Phi$的一个子集, 如果$\alpha$, $\beta\in\Psi$, $\alpha+\beta\in\Phi$意味着$\alpha+\beta\in\Psi$, 则称$\Psi$是闭的. 例如$\Phi$; $\Phi^+$; 所有的$i\alpha+j\beta\in\Phi$的集合$(i,\ j\geqslant0;\ \alpha,\ \beta$是线性无关根).

**引理 B** 设$\Psi$是一个闭根集, $\Psi\cap-\Psi=\emptyset$. $\mathfrak{X}$是由所有$\frac{x_\alpha^t}{t!}$ $(\alpha\in\Psi,\ t\in\mathbf{Z}^+)$生成的$\mathfrak{U}(L)$的子环(带1). 则相对于$\Psi$的任意一种给定的序,乘积$\prod_{\alpha\in\Psi}\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$(按给定的序写出)的集合形成$\mathbf{Z}$模

$\mathfrak{X}$ 的基.

证 很清楚，$L_\alpha(\alpha\in\Psi)$ 的 F-张成是 $L$ 的一个子代数 $X$；把 PBW 定理应用于 $\mathfrak{U}(X)$，可知被指出的乘积确实构成了 $\mathfrak{X}$ 在 F 上的基. 因此只要证明系数都在 $\mathbf{Z}$ 内就够了. 我们称 $\sum_{\alpha\in\Psi}t_\alpha$ 为 $\prod_{\alpha\in\Psi}\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$ 的次数. 若 $x\in\mathfrak{X}$ 不是纯量，则 $x=c\prod\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}+$(次数 $<\sum t_\alpha$ 的项)，这里 $0\neq c\in$ F，且剩下的次数 $t=\sum t_\alpha$ 的项将牵涉到与 $(\cdots t_\alpha\cdots)$ 不同形式的序列. 现在 $\mathfrak{X}$ (通过伴随表示) 作用在 $L\otimes\cdots\otimes L$ ($t$ 个) 上. 特别地，观察 $x\cdot((\underbrace{x_{-\alpha}\otimes\cdots\otimes x_{-\alpha}}_{t_\alpha})\otimes(\underbrace{x_{-\beta}\otimes\cdots\otimes x_{-\beta}}_{t_\beta})\otimes\cdots)$，这里 $\Psi=(\alpha,\ \beta,\ \cdots)$. 那么这一个元素在 $H\otimes\cdots\otimes H$ 里的分量是什么呢(关于标准 PBW 基)？经验算可知，$x$ 里的第一项，$c\prod_\alpha\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$ 能得出 $c((\underbrace{h_\alpha\otimes\cdots\otimes h_\alpha}_{t_\alpha})\otimes(\underbrace{h_\beta\otimes\cdots\otimes h_\beta}_{t_\beta})\otimes\cdots)$. 可是在 $x$ 里的所有其它的项 $\prod\frac{x_\alpha^{u_\alpha}}{u_\alpha!}$ 作用于上述元素上不能得出 $H\otimes\cdots\otimes H$ 里的非零分量：或者它们所含有的因子数太少 ($\sum u_\alpha<\sum t_\alpha$)，或者虽然有 $\sum u_\alpha=\sum t_\alpha$，但是各个因子"分配"得不正确.

引理 A 的推论里说，$x$ 保持 $L(\mathbf{Z})\otimes\cdots\otimes L(\mathbf{Z})$ ($t$ 个因子) 不变. 此外，$L(\mathbf{Z})$ 与 $\Delta$ 的选取无关，所以假设 $\alpha$($\Psi$ 的第一个元素) 是素根. 使 $\beta$ 是素根的 $h_\beta$ 组成了自由 $\mathbf{Z}$-模 $H(\mathbf{Z})=L(\mathbf{Z})\cap H$ 的基，所以它们的各个张量积构成了自由 $\mathbf{Z}$-模 $H(\mathbf{Z})\otimes\cdots\otimes H(\mathbf{Z})$ 的基. 另一方面，刚才已证 $c((h_\alpha\otimes\cdots\otimes h_\alpha)\otimes(h_\beta\otimes\cdots\otimes h_\beta)\otimes\cdots)\in H(\mathbf{Z})\otimes\cdots\otimes H(\mathbf{Z})$. 这就使得 $c\in\mathbf{Z}$. 现在可从 $x$ 内减去 $c\prod\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$，而对元素 $x-c\prod\frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}\in\mathfrak{X}$ 可重复同样的论证. 对项的个数进行归纳，即可完成引理的证明. ▌

为了便利起见，让我们把 $\mathfrak{U}(L)$ 内的元素 $\frac{x_\alpha^t}{t!}$，$\binom{h_i-j}{k}$ ($j,\ k\in\mathbf{Z},\ t\in\mathbf{Z}^+$) 的任一乘积称为 $\mathfrak{U}(L)$ 内的一个单项，它的高度等于所出现的各个 $t$ 之和.

**引理 C** 设 $\alpha, \beta\in\Phi$, $k, m\in\mathbf{Z}^+$. 则 $\frac{x_\beta^m}{m!}\frac{x_\alpha^k}{k!}$ 是 $\frac{x_\alpha^k}{k!}\frac{x_\beta^m}{m!}$ 与其它的高度 $<k+m$ 的单项的 $\mathbf{Z}$-线性组合.

**证** 若 $\alpha=\beta$, 不需证明. 如果 $\alpha=-\beta$, 可从引理 26.2 得出. 否则, $\alpha$, $\beta$ 是线性无关的, 我们可以把上述引理 B 应用于形如 $i\alpha+j\beta(i, j\geqslant 0)$ 的根集, 把所给的单项写成 $\frac{x_\alpha^k}{k!}\frac{x_\beta^m}{m!}$ 以及其它单项的 $\mathbf{Z}$-线性组合. 剩下的, 是证明这些其它单项的高度都 $<k+m$. 但 PBW 定理(17.3)已经向我们保证: $\frac{x_\beta^m}{m!}\frac{x_\alpha^k}{k!}$ 等于 $\frac{x_\alpha^k}{k!}\frac{x_\beta^m}{m!}$ 加上次数 $<k+m$ 的 PBW 基元素的 F 线性组合. 由于使用着一个 PBW 基(或它的纯量倍), 这就完成了证明. ▮

**引理 D** 设 $\alpha, \beta\in\Phi$, $f(T)\in\mathrm{F}[T]$($T$ 是不定元). 则对所有的 $k\in\mathbf{Z}^+$, $x_\alpha^k f(h_\beta)=f(h_\beta-k\alpha(h_\beta))x_\alpha^k$.

**证** 由于线性的性质, 只要对 $f$ 是形如 $T^m$ 时加以证明就够了. 此时论断变成了: $x_\alpha^k h_\beta^m=(h_\beta-k\alpha(h_\beta))^m x_\alpha^k$ (*). 如 $k$ 或 $m=0$, 这是明显的. 若 $k=m=1$, 则得 $x_\alpha h_\beta=h_\beta x_\alpha-\alpha(h_\beta)x_\alpha=(h_\beta-\alpha(h_\beta))x_\alpha$, 这正是所要求的. 再对 $k$ 和 $m$ 施行数学归纳法. 对固定的 $k$, 由(*)对所有 $<m$ 的指数成立, 可意味着(*)对 $m$ 成立. 所以对 $k=1$ 以及任意的 $m$, (*)式为真. 于是, 由(*)对 $<k$ 的指数以及任意的 $m$ (或 $f$) 成立, 即意味着 (*) 对 $k$ 以及任意的 $m$ 成立. ▮

## 26.4. Kostant 定理的证明

取定 $\Phi^+$ 的某一个序$(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. 用 $A=(a_1, \cdots, a_m)$, $B=(b_1, \cdots, b_l)$, $C=(c_1, \cdots, c_m)$ 表示非负整数的 $m$ 元组或 $l$ 元组. 然后如下地定义 $\mathfrak{U}(L)$的元素:

$$f_A=\frac{x_{-\alpha_1}^{a_1}}{a_1!}\cdots\frac{x_{-\alpha_m}^{a_m}}{a_m!},$$

$$h_B=\binom{h_1}{b_1}\cdots\binom{h_l}{b_l},$$

$$e_C=\frac{x_{\alpha_1}^{c_1}}{c_1!}\cdots\frac{x_{\alpha_m}^{c_m}}{c_m!}.$$

注意到各个$h_B$组成了$\mathfrak{U}(H)$在F上的基.实质上,这就是(26.1)内把它们与多项式相联系时所提到的结论. 把它与PBW定理联合起来,就可证明各个元素$f_A h_B e_C$构成$\mathfrak{U}(L)$的一个F基.

**定理**(Kostant) 设$\mathfrak{U}(L)_{\mathbf{Z}}$是由所有$x_\alpha^t/t!$ $(\alpha\in\Phi,\ t\in\mathbf{Z}^+)$生成的$\mathfrak{U}(L)$的子环(带1). 又若$\mathfrak{B}$是$\mathfrak{U}(L)$里的格,具有由所有$f_A h_B e_C$组成的$\mathbf{Z}$基. 则$\mathfrak{B}=\mathfrak{U}(L)_{\mathbf{Z}}$.

**证** 实际上这是一件拟合工作. 首先,根据引理26.2的推论,每个$\binom{h_i}{b_i}\in\mathfrak{U}(L)_{\mathbf{Z}}$,所以$\mathfrak{B}\subset\mathfrak{U}(L)_{\mathbf{Z}}$.

反过来的包含关系较难证明. 不过只要能证明每一个"单项"(在(26.3)内被定义)都在$\mathfrak{B}$内就够了,这是因为它们张成了$\mathbf{Z}$-模$\mathfrak{U}(L)_{\mathbf{Z}}$. 为此我们对"次数"使用归纳法:0次的单项只含有形如$\binom{h_i-j}{k}$的因子,根据引理26.1,它们在$\mathfrak{B}$内. 一般说来,(26.3)的引理C和D(再加上归纳假设)容许我们把一个单项写成其它一些单项的$\mathbf{Z}$-线性组合,而使得这些单项里涉及到的$x_{-\alpha}$, $h$与$x_\alpha$都按给定的次序排列. 等式$\frac{T^k}{k!}\frac{T^m}{m!}=\binom{m+k}{m}\frac{T^{k+m}}{(k+m)!}$进一步保证在每一个所得到的单项里的各个$x_{\pm\alpha}$至多出现一次. 在此引理26.1及(26.3)的引理D就可使我们完成这一证明. ▮

## 练 习

1. 设$L=\mathfrak{sl}(2,\mathsf{F})$. 令$(v_0, v_1, \cdots, v_m)$是(7.2)内对首权$m$的不可约$L$-模$V(m)$所构成的基. 证明这一基的$\mathbf{Z}$-张成在$\mathfrak{U}(L)_{\mathbf{Z}}$之下是不变的. 设$(w_0, w_1, \cdots, w_m)$是(22.2)里所使用的$V(m)$的基. 证明$w_i$的$\mathbf{Z}$-张成在$\mathfrak{U}(L)_{\mathbf{Z}}$之下不是不变的.

2. 设$\lambda\in\Lambda^+\subset H^*$是支配整线性函数,回忆一下(20.3)的模$Z(\lambda)$及不可约商$V(\lambda)=Z(\lambda)/Y(\lambda)$. 证明:根据Kostant定理,$V(\lambda)$的权$\mu$的重数可以有效地计算如下:如果$v^+$是$Z(\lambda)$的极大向量,则使得$\sum a_i\alpha_i=\lambda-\mu$的各个$f_A.v^+$构成$Z(\lambda)$内的$\mu$权空间的F-基. (参看(24.1)的引理D.)然后,

如果 $\sum a_i\alpha_i=\sum c_i\alpha_i$，则 $e_C f_A.v^+$ 是 $n_{CA}v^+$ 的一个整倍数．这样，导出了一个 $d\times d$ 整矩阵 $(n_{CA})$ ($d=\mu$ 在 $Z(\lambda)$ 内的重数)，它的秩 $=m_\lambda(\mu)$．(参见练习 20.9.)此外，只要知道了 Chevalley 基的结构常数，这一整矩阵就可计算出来．对于型 $A_2$，取小的 $\lambda-\mu$，做一次这样的计算．

【附注】

定理 26.4 出现在 Kostant[2]，在此复述了 Steinberg[2] 里的证明。对于从一个"图脉"(Scheme) 的观点出发的有关材料，参见 Chevalley [4]，Borel[2]．练习 2 是以 Burgoyne[1] 为基础的。

## 27. 容 许 格

记号如同 § 26，利用 Kostant 定理，我们将在任意有限维 $L$-模里构造一个"容许"格，而且描述它在 $L$ 里的稳定子．用素数模约化就能导致在任意素特征数域上的线性群及线性李代数，它推广了 § 25 里给出的 Chevalley 群及 Chevalley 代数的构造．

### 27.1. 容许格的存在性

从 Kostant 定理(或它前面的引理)可得出，如果 $N^+=\coprod_{\alpha\succ 0}L_\alpha$，$N^-=\coprod_{\alpha\prec 0}L_\alpha$，则 $\mathfrak{U}(N^-)$，$\mathfrak{U}(H)$，$\mathfrak{U}(N^+)$ 各有一个"$\mathbf{Z}$-形式"，分别带有由 $f_A$，$h_B$，$e_C$ 所构成的 $\mathbf{Z}$-基．我们把这些子环记为 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^-$，$\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^0$，$\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^+$，所以 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}(=\mathfrak{U}(L)_{\mathbf{Z}})$ 等于 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^-\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^0\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^+$．

更进一步的准备是：把 F 上有限维向量空间 $V$ 内的一个格 $M$ 定义为 $V$(在 F 上) 的一个基的 $\mathbf{Z}$-张成．因为 $\operatorname{char}F=0$，$V$ 的一个有限生成 $\mathbf{Z}$-子模自动地成为一个有限秩的自由-$\mathbf{Z}$ 模．所以 $V$ 内的一个格可以刻划成 $V$ 的一个有限生成子群，它在 F 上张成 $V$，且有 $\mathbf{Z}$-秩 $\leqslant\dim_F V$．

**引理** 设 $d\in\mathbf{Z}^l$，$S\subset\mathbf{Z}^l$ 是不含 $d$ 的有限集．则存在 F 上多项式 $f(T_1,\cdots,T_l)$，使得 $f(\mathbf{Z}^l)\subset\mathbf{Z}$，$f(d)=1$ 且 $f(S)=0$．

**证** 假定 $d=(d_1,\cdots,d_l)$．如果 $k\in\mathbf{Z}^+$，置 $f_k(T_1,\cdots,T_l)=\prod_{i=1}^{l}\binom{T_i-d_i+k}{k}\binom{-T_i+d_i+k}{k}$，则 $f_k(\mathbf{Z}^l)\subset\mathbf{Z}$ (见引理 26.1)，$f_k(d)=1$．在 $\mathbf{Z}^l$ 内以 $d$ 为中心，边长为 $2k$ 的"箱子"内，显然 $f_k$ 除

了 $d$ 之外都取 0 值。所以只要把 $k$ 选取足够大，使得这个"箱子"把整个有限集 $S$ 裹在内，再令 $f=f_k$ 即可. ∎

**定理** 设 $V$ 是有限维 $L$-模. 则:

(a) $V$ 的任一个在 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}$ 之下不变的子群是它与 $V$ 的权空间的交集的直和.

(b) $V$ 含有一个格，它在 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}$ 下不变.

**证** (a) 设 $M$ 是 $V$ 的一个子群，它在 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}$ 下不变. 对于 $V$ 的每一个权 $\mu$，置 $d(\mu)=(\mu(h_1),\cdots,\mu(h_l))\in\mathbf{Z}^l$. 取定 $V$ 的任意权 $\lambda$，上述引理能够导出一个 F 上 $l$ 变量的多项式 $f$，使得 $f(\mathbf{Z}^l)\subset\mathbf{Z}$，$f(d(\lambda))=1$，且对 $\Pi(V)$ 内的 $\mu\neq\lambda$，有 $f(d(\mu))=0$. 置 $u=f(h_1,\cdots,h_l)$. 根据引理 26.1，$u\in\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^0$. 显然，$u$ 作用在 $V$ 上相当于到 $V_\lambda$ 上的射影. 特别是，如果 $v\in M$，则它的 $V_\lambda$-分量 $u.v$ 也在 $M$ 内.

(b) 据完全可约性的 Weyl 定理，可假设 $V=V(\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda^+)$，即 $V$ 不可约. 令 $v^+\in V$ 是(权 $\lambda$ 的)极大向量，且置 $M=\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^-.v^+$. 因为在 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^+$ 的 $\mathbf{Z}$-基 $\{e_a\}$ 里除 1 外的所有元素都使 $v^+$ 变为 0，我们有 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^+.v^+=\mathbf{Z}v^+$. 而且也有 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^0.v^+=\mathbf{Z}v^+$，这是因为 $\binom{h_i}{b_i}$ 作用在 $v^+$ 上相当于用整数

$$\frac{\lambda(h_i)(\lambda(h_i)-1)\cdots(\lambda(h_i)-b_i+1)}{b_i!}$$

作纯量乘法. 也就是说，$\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}.v^+=\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^-\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^0\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^+.v^+=\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^-.(\mathbf{Z}v^+)=M$. 所以在 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}$ 下 $M$ 是不变的. 这一论证也说明了 $M\cap V_\lambda=\mathbf{Z}v^+$. 我们知道，除了有限个 $f_A$ 以外，其余的 $f_A$ 都零化了 $v^+$，所以 $M$ 是有限生成的. 此外，由于 $\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}^-$ 含有 $\mathfrak{U}(N^-)$ 的 F 基，而 $\mathfrak{U}(N^-).v^+=V$，因此 $M$ 在 F 上张成 $V$.

剩下要证的是: $M$ 的 $\mathbf{Z}$-秩不超过 $\dim_{\mathsf{F}}V$. 如果不是这样，设 $r$ 是 $M$ 里下述向量最少的个数: 它们在 $\mathbf{Z}$ 上是自由的，但在 F 上线性相关，譬如说，$\sum_{i=1}^{r}a_iv_i=0$ $(a_i\in\mathsf{F},\ 0\neq v_i\in M)$. 必定有某个 $u\in\mathfrak{U}_{\mathbf{Z}}$，使 $u.v_1$ 有非零的 $V_\lambda$-分量; 否则，$v_1$ 将生成不可约模 $V$ 的一个

非零真 $\mathfrak{U}(L)$-子模. 另一方面, 每个 $u.v_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 的 $V_\lambda$-分量在 $M$ 内(根据(a)), 故它们都是 $v^+$ 的整数倍, 即 $m_iv^+$(因为 $M\cap V_\lambda=\mathbf{Z}v^+$). 因而 $\sum a_iv_i=0$ 意味着 $\sum a_i(u.v_i)=0$, 于是 $\sum a_im_i=0$ (但 $m_1\neq 0$). 从而 $0=m_1\left(\sum_{i=1}^r a_iv_i\right)-\left(\sum_{i=1}^r a_im_i\right)v_1=\sum_{i=2}^r a_i(m_1v_i-m_iv_1)$. 向量 $m_1v_i-m_iv_1(2\leqslant i\leqslant r)$ 在 $M$ 内而且显然在 $\mathbf{Z}$ 上是自由的, 但它们在 F 上线性相关, 故与 $r$ 的极小性相矛盾, 这就证明了 $M$ 是 $V$ 的一个格, 且在 $\mathfrak{U}_\mathbf{Z}$ 下不变. ∎

在有限维 $L$-模 $V$ 内 $\mathfrak{U}_\mathbf{Z}$ 下不变的格 $M$ 称为**容许格**. 上述定理的(b)断定了这样一个格的存在性. 它的证明也已说明了怎样构造它(如果 $V$ 不可约, 它就是包含给定的极大向量的最小可能容许格). (a)意味着 $M=\coprod_{\mu\in\Pi(V)}(M\cap V_\mu)$. 当然, 当 $V$ 是 $L$ 自己时(关于伴随表示 ad), Chevalley 基的 $\mathbf{Z}$-张成就是一个容许格(25.5).

## 27.2. 容许格的稳定子

设 $V$ 是有限维 $L$-模. 为了避免平凡的情形, 我们假设 $V$ 是一一的(也就是说, 把 $L$ 中平凡地作用在 $V$ 上的单纯理想舍去). 则容易看出: $\Pi(V)$ 的 $\mathbf{Z}$-张成, 称之为 $\Lambda(V)$, 介于 $\Lambda$ 及根格 $\Lambda_r$ 之间(练习 21.5).

利用定理 27.1, 选取 $V$ 内一个容许格 $M$, 且设 $L_V$ 是它在 $L$ 内的稳定子, $H_V=H\cap L_V$. (以后将要证明: $L_V$ 仅依赖于 $V$, 而与 $M$ 的选取无关, 所以这样的记法是不会发生歧义的.)显然 $L(\mathbf{Z})\subset L_V$, 且 $L_V$ 在方括号运算下是封闭的. 根据定理 27.1 的(a), 所谓 $h\in H$ 使 $M$ 不变, 也就等于说 $\lambda(h)\in\mathbf{Z}$ 对所有 $\lambda\in\Pi(V)$ (或 $\Lambda(V)$)成立. 这也说明了对于格的包含关系 $\Lambda\supset\Lambda(V)\supset\Lambda_r$ 可以诱导出相逆的包含关系 $H(\mathbf{Z})\subset H_V\subset H_0$, 这里的 $H_0=\{h\in H\mid\lambda(h)\in\mathbf{Z}$ 对所有 $\lambda\in\Lambda_r\}$ 以及 $H(\mathbf{Z})=H\cap L(\mathbf{Z})$ (=所有 $h_\alpha(\alpha\in\Phi)$ 的 $\mathbf{Z}$-张成). 特别是, $H_V$ 是 $H$ 内的格. 我们的目的是证明 $L_V$ 是 $L$ 内一个容许格. 以下的一般引理是第一步. (它可以被写成关

于结合代数的一个结论，但在此只需要它的一个特殊情况.)

**引理** 若$u\in\mathfrak{U}(L)$, $x\in L$, 则在$\mathfrak{U}(L)$内

$$\frac{(\operatorname{ad} x)^n}{n!}(u)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{x^{n-i}}{(n-i)!}u\frac{x^i}{i!}$$

**证** 对$n=1$, 上式变成$\operatorname{ad} x(u)=xu-ux$, 由定义，这是正确的. 对$n$施行归纳法:

$$\begin{aligned}\frac{(\operatorname{ad} x)^n}{n!}(u)&=\frac{\operatorname{ad} x}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^{n-1-i}}{(n-1-i)!}u\frac{x^i}{i!}\right)\\&=\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^{n-i}}{n(n-1-i)!}u\frac{x^i}{i!}\right)\\&\quad-\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{x^{n-1-i}}{(n-1-i)!}u\frac{x^{i+1}}{i!n}\right).\end{aligned}$$

把指标$i$代换以$i-1$后，第二个和式变成:

$$-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{x^{n-i}}{(n-i)!}u\frac{x^i}{(i-1)!n}.$$

对于$0<i<n$, 把两个和式的第$i$项合并，可得

$$(-1)^ix^{n-i}ux^i\left(\frac{1}{n(n-1-i)!i!}+\frac{1}{n(n-i)!(i-1)!}\right).$$

括号里的数正是$\frac{1}{(n-i)!i!}$. 第0项与第$n$项是$\frac{x^n}{n!}u$及$(-1)^nu\cdot\frac{x^n}{n!}$, 正是所要证的. ∎

**命题** $L_V$是$L$-模$L$里的容许格. 此外，$L_V=H_V+\coprod_{\alpha\in\Phi}\mathbf{Z}x_\alpha$; 所以$L_V$仅依赖于$V$(或仅依赖于$\Lambda(V)$), 与$M$的选取无关.

**证** 我们知道$L(\mathbf{Z})=H(\mathbf{Z})+\coprod\mathbf{Z}x_\alpha\subset L_V$, 并且显然$H_V\subset L_V$. 另一方面，上述引理保证了在所有的$(\operatorname{ad} x_\alpha)^m/m!$之下，$L_V$是不变的(从而也是在$\mathfrak{U}_\mathbf{Z}$之下不变的). 这就允许我们把$L_V$写成它与$H$及$L_\alpha$的交集之和(定理27.1(a)), 所以$L_V=H_V+\coprod(L_V\cap L_\alpha)$, 且$\mathbf{Z}x_\alpha\subset L_V\cap L_\alpha$. 如果证明了最后一个包含关系对每一个$\alpha\in\Phi$都是等式的话，则命题可立即得证.

考虑由$x\mapsto[x_{-\alpha}x]$ ($=h_\alpha$的倍数) 所定义的线性映射$\phi$: $L_\alpha\to H$. 因为$\dim L_\alpha=1$, 且$[x_{-\alpha}L_\alpha]\neq0$, 故$\phi$是内射的. $\phi$对于$L_V\cap L_\alpha$

的限制的象集在 $H_V$ 内(因为 $L_V$ 在方括号运算下是封闭的，且 $H_V=L_V\cap H$)。从而在 $\mathsf{F}h_\alpha\cap H_V$ 内。这个群是一条直线与 $H$ 内一个格的交集，因此是(无限)循环的。从而 $L_V\cap L_\alpha$ 是循环的。由于 $x_\alpha\in L_V\cap L_\alpha$，可找出形如 $\frac{1}{n}x_\alpha(n\in\mathbf{Z}^+)$ 的生成元。则

$$\frac{(\mathrm{ad}\,x_{-\alpha})^2}{2!}\left(\frac{x_\alpha}{n}\right)=\frac{x_{-\alpha}}{n}\in L_V$$

(因为 $L_V$ 在 $\mathfrak{U}_\mathbf{Z}$ 下不变)，且又有

$$-\left(\mathrm{ad}\,\frac{x_\alpha}{n}\right)^2\left(\frac{x_{-\alpha}}{n}\right)=\frac{2x_\alpha}{n^3}\in L_V$$

(因为 $L_V$ 在方括号运算下是封闭的)。但此时 $\frac{2}{n^3}\in\frac{1}{n}\mathbf{Z}$ 迫使 $n=1$。这就证明了 $L_V\cap L_\alpha=\mathbf{Z}x_\alpha$，正是所要证的。▮

作为一个例子，考虑 $L=\mathfrak{sl}(2,\mathsf{F})$，它有标准基$(x,y,h)$。对于 $L$ 的 2 维自然表示，$V=\mathsf{F}^2$，基$\{(1,0),(0,1)\}$显然张成一个容许格，$L_V=\mathbf{Z}h+\mathbf{Z}x+\mathbf{Z}y(=L(\mathbf{Z}))$。另一方面，若取 $L(\mathbf{Z})$ 作为 $L$ 内的容许格(关于 3 维表示 ad)，我们发现 $L_V=\mathbf{Z}\left(\frac{h}{2}\right)+\mathbf{Z}x+\mathbf{Z}y$。这些极端的情况分别对应于根系 $\mathsf{A}_1$ 的两个可能的权格 $\Lambda$，$\Lambda_r$(练习 4)。

## 27.3. 容许格的变化

设 $V=V(\lambda)(\lambda\in\Lambda^+)$ 是一个不可约的 $L$-模。$V$ 内容许格的可能选择是什么？根据定理 27.1(a)，这样一个格 $M$ 必须包含一个极大向量 $v^+$，所以必须包含容许格 $\mathfrak{U}_\mathbf{Z}^-.v^+=\mathfrak{U}_\mathbf{Z}.v^+$，即在定理 27.1(b)的证明中被使用的格。因为 $v^+$ 被 $V$ 确定到相差一个纯量因子，故可使 $v^+$ 在整个讨论中保持不变，把极小容许格 $\mathfrak{U}_\mathbf{Z}.v^+$ 记为 $M_{\min}$。现在我们只要知道哪些其它的容许格与 $V$ 的交集在 $\mathbf{Z}v^+$ 内就够了。

回忆一下对偶模的概念：$V^*$ 是 $V$ 的对偶向量空间，$L$ 在其上的作用是 $(x\cdot f)(w)=-f(x\cdot w)(x\in L,w\in V,f\in V^*)$。如果 $X$

是 $V^*$ 的在 $L$ 下不变的子空间，则容易看出，$V$ 的相应子空间 $X^\perp$ 也是在 $L$ 下不变的，所以 $V^*$ 仍然是不可约的．事实上，可以指出它的首权（练习 21.6）：设 $\sigma\in\mathscr{W}$ 把 $\Delta$ 变成 $-\Delta$（从而把 $\Phi^+$ 变成 $\Phi^-$），且令 $w\in V$ 是权 $\sigma\lambda$ 的非零向量．所以 $w$ 是"极小向量"，它被所有的 $x_{-\alpha}$ 所零化．当然 $\dim V_{\sigma\lambda}=\dim V_\lambda=1$，因此 $w$ 实质上是唯一的．相对于由 $w$ 及其它权向量所构成的 $V$ 的基，取 $f^+$ 为对偶于 $w$ 的线性函数，则 $f^+$ 是 $V^*$ 的极大向量，权为 $-\sigma\lambda$，且 $V^*\cong V(-\sigma\lambda)$．

现在设 $M$ 是 $V$ 内的一个容许格，定义 $M^*=\{f\in V^*|f(M)\subset\mathbf{Z}\}$．如果 $M$ 是 $V$ 的某一个基的 $\mathbf{Z}$–张成，则 $M^*$ 显然是对偶基的 $\mathbf{Z}$–张成．特别，$M^*$ 是一个格．它甚至是容许格：$v\in M$，$f\in M^*$，意味着 $((x_\alpha^m/m!)\cdot f)(v)=\pm f((x_\alpha^m/m!)\cdot v)\in\mathbf{Z}$．同样明显的是：$V$ 内容许格的包含关系 $M_1\subset M_2$ 可以诱导出一个逆包含关系 $M_1^*\supset M_2^*$．

现在假设 $v^+$ 已被取定（从而 $M_{\min}$ 也取定）．则有一个典范的方法在 $V_{\sigma\lambda}\cap M_{\min}$ 内选取一个极小向量．只要注意到定理 21.2 的证明中第(5)步所构造的 Weyl 反射是 $V$ 的变换，并且它代表的是 $\mathfrak{U}_\mathbf{Z}$ 的元素；特别，$\sigma$ 把 $\mathbf{Z}v^+$ 映到 $M_{\min}\cap V_{\sigma\lambda}$ 上．在此可定义 $w$ 为 $v^+$ 的象，然后按前面所述的方法，取 $f^+\in V^*_{-\sigma\lambda}$（它是相对于 $M_{\min}$ 的基的对偶基的元素）．便立即可得：$M^*_{\min}\cap V^*_{-\sigma\lambda}=\mathbf{Z}f^+$．

现在设 $M$ 是 $V$ 内的容许格，它与 $V_\lambda$ 的交恰好在 $\mathbf{Z}v^+$ 内．上述论证说明了 $M$ 与 $V_{\sigma\lambda}$ 的交在 $\mathbf{Z}w$ 内，从而 $M^*$ 与 $V^*_{-\sigma\lambda}$ 的交也恰好在 $\mathbf{Z}f^+$ 内．所以当 $M$ 处在 $V$ 内的上述类型的所有容许格的集合中进行变化时，$M^*$ 也处在 $V^*$ 内容许格的类似集合里进行变化，但包含关系是逆转的．这说明了 $M^*$ 既有上"界"也有下"界"．这对 $M$ 也正确．（对于 ad，我们用只考虑 $H$ 的对偶格的方法，也证明了这一点．）

**命题** 设 $V=V(\lambda)$，$\lambda\in\Lambda^+$，且具有极大向量 $v^+$．

(a) 凡是与 $V_\lambda$ 相交在 $\mathbf{Z}v^+$ 内的容许格都包含 $M_{\min}=\mathfrak{U}_\mathbf{Z}.v^+$．

(b) 凡是与 $V_\lambda$ 相交在 $\mathbf{Z}v^+$ 内的容许格都被包含在 $M_{\max}$ 内．

它是与$V^*$内一个适当的$(M^*)_{\min}$对偶的格.

## 27.4. 过渡到任意域

设$\mathbf{F}_p$是特征数$p$的素域, K是$\mathbf{F}_p$的扩域. 又若$V$是一个真实$L$-模, 则$V$的权在$\Lambda_r$与$\Lambda$之间张成一个格, 记为$\Lambda(V)$. 选取$V$内一个容许格$M$, 它在$L$内的稳定子是$L_V=H_V+\coprod_{\alpha\in\Phi}\mathbf{Z}x_\alpha$, $H_V=\{h\in H\mid\lambda(h)\in\mathbf{Z}$ 对所有 $\lambda\in\Lambda(V)\}$(27.2).

设$V(\mathsf{K})=M\otimes_{\mathbf{Z}}\mathsf{K}$, $L_V(\mathsf{K})=L_V\otimes_{\mathbf{Z}}\mathsf{K}$. 因为$L_V$同构于End $M$的一个子群(且在方括号运算下是封闭的), 所以$L_V(\mathsf{K})$可以等同于$\mathfrak{gl}(V(\mathsf{K}))$ $(=\text{End}\,V(\mathsf{K}))$的一个李子代数. 此外, 包含映射$L(\mathbf{Z})\to L_V$诱导了一个李代数同态$L(\mathsf{K})\to L_V(\mathsf{K})$, 它在$\coprod \mathsf{K}x_\alpha$上是内射的, 但在$H(\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}}\mathsf{K}=H(\mathsf{K})$内可能有非零的核. 为了观察它们能起到怎样的作用, 回忆一下在(27.2)中对$\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$的讨论. 若$p=2$, 则当$V=L$(伴随表示)时, $L(\mathsf{K})$里的$h\otimes 1$被映为$L_V(\mathsf{K})$内的$2\left(\frac{h}{2}\otimes 1\right)=0$. 此外, $L(\mathsf{K})$内的乘法也与$L_V(\mathsf{K})$内的不同: 例如, 在前者, $[hx]=2x=0$, 而后者$\left[\frac{h}{2}x\right]=x\neq 0$. 另一方面, 当$p>2$时, $L(\mathsf{K})\to L_V(\mathsf{K})$是一个同构(不论权格的选取是$\Lambda(V)=\Lambda$或是$\Lambda_r$): 见练习5.

上述的讨论说明了: 通过同态$L(\mathsf{K})\to L_V(\mathsf{K})$, 每个真实的$L$-模$V$可产生一个关于$L(\mathsf{K})$的模$V(\mathsf{K})$, 它偶尔也可能不是真实的(当$L(\mathsf{K})$有一个理想时, 它必定是中心的, 且包含在$H(\mathsf{K})$内). 必须强调的是(尽管它的符号不反映出这一点): 所有这一切都依赖于$V$内容许格$M$的选择.

那么, (25.5)里所构造的Chevalley群$G(\mathsf{K})$在这里的类似物是什么呢? 因为$M$在自同态$\frac{x_\alpha^t}{t!}$之下$\left(\text{即在}\frac{\phi(x_\alpha)^t}{t!}\text{之下, 设}\phi\text{是}L\text{的表示}\right)$不变, 故$V(\mathsf{K})$在相应的自同态之下不变, 把这个自同态记为$x_{\alpha,t}(x_{\alpha,0}=1)$. 注意到关于$t<p$, $x_{\alpha,t}$的作用正象

$\frac{(x_\alpha \otimes 1)^t}{t!}$，而当 $t \geqslant p$ 时，后一记号不再有意义．不管怎样，对足够大的 $t$，有 $x_{\alpha,t}=0$，所以我们可写出 $\theta_\alpha(1)=\sum_{t=0}^{\infty} x_{\alpha,t} \in \mathrm{End}(V(\mathsf{K}))$．很明显，$\theta_\alpha(1)$的行列式是 1，所以它属于 $SL(V(\mathsf{K}))$．更一般地，我们可这样地定义 $V(\mathsf{K})$的自同构 $\theta_\alpha(c)$：先构成 $\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(Tx_\alpha)^t}{t!}$，然后再把不定元 $T$ 特殊化为 $c\in\mathsf{K}$．由所有 $\theta_\alpha(c)(\alpha\in\Phi, c\in\mathsf{K})$ 生成的群 $G_V(\mathsf{K})$被称为**型 $\Lambda(V)$ 的 Chevalley 群**，若 $\Lambda(V)=\Lambda_r$，则它为**伴随型的**；若 $\Lambda(V)=\Lambda$，则它为**普遍型的**．同前，$G_V(\mathsf{K})$实际上依赖于 $M$ 的选取．

## 27.5. 有关结果的概述

刚才描述的构造引起了很多问题，而且并不是所有的问题都解决了．为了使读者有一个印象：哪些问题已解决了．现在列出以下一些结果来(但不加证明)：

(1) 在同构的范围内，$G_V(\mathsf{K})$与 $L_V(\mathsf{K})$ 依赖于权格 $\Lambda(V)$，但不依赖于 $V$ 本身或者 $M$ 的选取．(不过 $M$ 确实对 $G_V(\mathsf{K})$，$L_V(\mathsf{K})$ 在 $V(\mathsf{K})$上的作用是有影响的．)如果 $\Lambda(V)\supset\Lambda(W)$，则存在典范同态 $G_V(\mathsf{K})\to G_W(\mathsf{K})$，$L_W(\mathsf{K})\to L_V(\mathsf{K})$．特别，普遍型 Chevalley 群 $(\Lambda(V)=\Lambda)$“覆盖”了所有其它的群，而伴随型的群则被所有其它的群所“覆盖”．

(2) 设 $V=V(\lambda)$，$\lambda\in\Lambda^+$，$M=M_{\min}$．则 $V(\mathsf{K})$是 $G_V(\mathsf{K})$的循环模，由向量 $v\otimes 1$，$v\in M\cap V_\lambda$ 所生成．作为它的结果，$V(\mathsf{K})$有一个唯一极大的 $G_V(\mathsf{K})$-子模，从而有一个唯一的(“首权”$\lambda$ 的)不可约同态象．另一方面，若 $M=M_{\max}$，则 $V(\mathsf{K})$有唯一的“首权”$\lambda$ 的不可约子模．

(3) 当 $\lambda\in\Lambda^+$ 满足 $0\leqslant\lambda(h_i)<p(1\leqslant i\leqslant l)$，$p=\mathrm{char}\,\mathsf{K}$ 时，用 $L_V(\mathsf{K})$ (或 $L(\mathsf{K})$)代替 $G_V(\mathsf{K})$后，(2)的断言仍然是正确的；结果得到的 $p^l$ 个不可约模是不等价的，而且它包括了所有的不可约“限制”$L(\mathsf{K})$-模(的同构类)．

(4) 当 $V(\mathsf{K})$ 被看作为 $G_V(\mathsf{K})$ 或 $L_V(\mathsf{K})$ 模时，$V(\mathsf{K})$ 的合成因子与容许格的选取无关。

## 练　习

1. 若 $M$ 是 $V$ 内的容许格，则对于 $V$ 的每个权 $\mu$，$M\cap V_\mu$ 是 $V_\mu$ 里的格.

2. 证明 $L$ 里的容许格如果包含 $L(\mathbf{Z})$ 且在方括号运算下是封闭的，则必具有形式 $L_V$. [模仿命题 27.2 的证明; 参见练习 21.5.]

3. 如果 $M$(或 $N$)是 $V$(或 $W$)内的容许格，则 $M\otimes N$ 是 $V\otimes W$ 内的容许格(见引理 26.3A). 利用这一事实，以及把 $V^*\otimes V$ 等同于 $\operatorname{End}V$(作为 $L$-模)(6.1)，证明 $L_V$ 在命题 27.2 的所有 $(\operatorname{ad}x_\alpha)^m/m!$ 之下是不变的(不使用引理 27.2).

在以下练习里，$L=\mathfrak{sl}(2, \mathsf{F})$ 且把权看作整数.

4. 设 $V=V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$. 证明当 $\lambda$ 是奇数时，$L_V=L(\mathbf{Z})$，而当 $\lambda$ 为偶数时，$L_V=\mathbf{Z}\left(\frac{h}{2}\right)+\mathbf{Z}x+\mathbf{Z}y$.

5. 若 $\operatorname{char}\mathsf{K}>2$，证明 $L(\mathsf{K})\to L_V(\mathsf{K})$ 关于 $V$ 的任何取法都是一个同构.

6. 设 $V=V(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^+$. 证明当 $\Lambda(V)=\Lambda$ 时，$G_V(\mathsf{K})\cong SL(2, \mathsf{K})$; 当 $\Lambda(V)=\Lambda_r$ 时，$G_V(\mathsf{K})\cong PSL(2, \mathsf{K})$.

7. 若 $0\leqslant\lambda<\operatorname{char}\mathsf{K}$, $V=V(\lambda)$，证明 $V(\mathsf{K})$ 作为 $L(\mathsf{K})$-模是不可约的.

8. 固定 $\lambda\in\Lambda^+$. 则 $V(\lambda)$ 内的一个极小容许格 $M_{\min}$ 有一个 $\mathbf{Z}$-基 $(v_0, \cdots, v_\lambda)$，它满足引理 7.2 的公式:

$$h.v_i=(\lambda-2i)v_i,$$
$$y.v_i=(i+1)v_{i+1}\quad(v_{\lambda+1}=0),$$
$$x.v_i=(\lambda-i+1)v_{i-1}\quad(v_{-1}=0).$$

证明相应的极大容许格 $M_{\max}$ 有一个 $\mathbf{Z}$-基 $(w_0, \cdots, w_\lambda)$, $w_0=v_0$，其上的作用为:

$$h.w_i=(\lambda-2i)w_i,$$
$$y.w_i=(\lambda-i)w_{i+1},$$
$$x.w_i=iw_{i-1}.$$

由此推导得 $v_i=\binom{\lambda}{i}w_i$. 所以 $[M_{\max}:M_{\min}]=\prod_{i=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{i}$.

9. 保持练习 8 的记号. 设 $M$ 是任一容许格，$M_{\max}\supset M\supset M_{\min}$，则 $M$ 有

一个 $\mathbf{Z}$-基$(z_0, \cdots, z_\lambda)$，使 $z_i=a_iw_i(a_i\in\mathbf{Z})$，$a_0=a_\lambda=1$. 定义整数 $b_i$, $c_i$ 为：$x.z_i=b_iz_{i-1}(b_0=1)$, $y.z_i=c_iz_{i+1}(c_\lambda=1)$. 证明 $c_i=\pm b_{\lambda-i}$ 且 $\Pi b_i=\lambda!$.

10. 保持练习 8 的记号. 设 $M$ 是 $M_{max}$ 的子群，且包含 $M_{min}$，并带有 $\mathbf{Z}$-基$(w_0, a_1w_1, \cdots, a_\lambda w_\lambda)$. 若要使 $M$ 成为容许格，那末加在 $a_i$ 上的必要与充分条件是什么？当 $\lambda=4$ 时写出所有的可能.

【附注】

这一材料大多取自 Steinberg[2]，也参见 Borel[2]. 对于较近的工作，可参看 Burgoyne[1], Burgoyne, Williamson[1], Humphreys[1], [2], Jantzen[1], [2], Shapovalov[1], Verma[3], Wong[1]. M. Elmer 建议了练习 8～10.

# 参考文献


V. K. Agrawala, J. G. F. Belinfante, [1] Weight diagrams for Lie group representations: A computer implementation of Freudenthal's algorithm in ALGOL and FORTRAN, *BIT* 9, 301–314 (1969).

J.-P. Antoine, D. Speiser, [1] Characters of irreducible representations of the simple groups, I., *J. Mathematical Physics* 5, 1226–1234, II., Ibid., 1560–1572 (1964).

D. W. Barnes, [1] On Cartan subalgebras of Lie algebras, *Math. Z.* 101, 350–355 (1967).

R. E. Beck, B. Kolman, [1] A computer implementation of Freudenthal's multiplicity formula, *Indag. Math.*, 34, 350–352 (1972).

J. G. F. Belinfante, B. Kolman, [1] *A Survey of Lie Groups and Lie Algebras with Computational Methods and Applications*, Philadelphia: SIAM, 1972.

I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, [1] Structure of representations generated by vectors of highest weight, *Funkcional. Anal. i Priložen.* 5, no. 1, 1–9 (1971) = *Functional Anal. Appl.* 5, 1–8 (1971).

[2] Differential operators on the base affine space and a study of g-modules, pp. 21–64 in: *Lie Groups and their Representations*, ed. I. M. Gel'fand, New York: Halsted, 1975.

[3] A category of g-modules, *Funkcional. Anal. i Priložen.* 10, no. 2, 1–8 (1976) = *Functional Anal. Appl.* 10, 87–92 (1976).

A. Borel, [1] *Linear Algebraic Groups*, New York: W. A. Benjamin, 1969.

[2] Properties and linear representations of Chevalley groups, Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, *Lecture Notes in Math.* 131, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970.

N. Bourbaki, [1] *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 1, Paris: Hermann, 1960.

[2] *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 4–6, Paris: Hermann, 1968.

[3] *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 7–8, Paris: Hermann, 1975.

R. Brauer, [1] Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen, *Math. Z.* 41, 330–339 (1936).

[2] Sur la multiplication des caractéristiques des groupes continus et semi-simples, *C. R. Acad. Sci. Paris* 204, 1784–1786 (1937).

N. Burgoyne, [1] Modular representations of some finite groups, Representation Theory of Finite Groups and Related Topics, *Proc. Symp. Pure Math. XXI*, Providence: Amer. Math. Soc., 1971.

N. Burgoyne, C. Williamson, [1] Some computations involving simple Lie algebras, *Proc. 2nd Symp. Symbolic & Alg. Manipulation*, ed. S. R. Petrick, New York: Assn. Computing Machinery, 1971.

R. W. Carter, [1] Simple groups and simple Lie algebras, *J. London Math. Soc.* 40, 193–240 (1965).

[2] *Simple Groups of Lie Type*, London-New York: Wiley, 1972.

P. Cartier, [1] On H. Weyl's character formula, *Bull. Amer. Math. Soc.* 67, 228–230 (1961).

C. Chevalley, [1] *Théorie des Groupes de Lie, Tome II*, Paris: Hermann, 1951.

[2] *Théorie des Groupes de Lie, Tome III*, Paris: Hermann, 1955.

[3] Sur certains groupes simples, *Tôhoku Math. J.* (2) 7, 14–66 (1955).

[4] *Certain schémas de groupes semi-simples*, *Sém. Bourbaki* 1960–61, *Exp.* 219, New York: W. A. Benjamin, 1966.

[5] Invariants of finite groups generated by reflections, *Amer. J. Math.* 77, 778–782 (1955).

C. W. Curtis, [1] Chevalley groups and related topics, *Finite Simple Groups*, ed., M. B. Powell, G. Higman, London-New York: Academic Press, 1971.

M. Demazure, [1] Une nouvelle formule des caractères, *Bull. Sci. Math.* 98, 163–172 (1974).

J. Dixmier, [1] *Algèbres Enveloppantes*, Paris: Gauthier-Villars, 1974; English translation, *Enveloping Algebras*, Amsterdam: North-Holland, 1977.

H. Freudenthal, [1] Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, I., *Indag. Math.* 16, 369–376 (1954); II., Ibid., 487–491; III., Ibid 18, 511–514 (1956).

H. Freudenthal, H. de Vries, [1] *Linear Lie Groups*, London-New York: Academic Press, 1969.

H. Garland, J. Lepowsky, [1] Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas, *Invent. Math.* 34, 37–76 (1976).

Harish-Chandra, [1] Some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.* 70, 28–96 (1951).

J. E. HUMPHREYS, [1] Modular representations of classical Lie algebras and semisimple groups, *J. Algebra* **19**, 51–79 (1971).

[2] Ordinary and modular representations of Chevalley groups, *Lect. Notes in Math.* **528**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1976.

N. JACOBSON, [1] *Lie Algebras*, New York-London: Wiley Interscience, 1962.

[2] *Exceptional Lie Algebras*, New York: Marcel Dekker, 1971.

J. C. JANTZEN, [1] Zur Charakterformel gewisser Darstellungen halbeinfacher Gruppen und Lie-Algebren, *Math. Z.* **140**, 127–149 (1974).

[2] Kontravariante Formen auf induzierten Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren, *Math. Ann.* **226**, 53–65 (1977).

V. G. KAC, [1] Infinite-dimensional Lie algebras and Dedekind's $\eta$-function, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **8**, no. 1, 77–78 (1974) = *Functional Anal. Appl.* **8**, 68–70 (1974).

I. KAPLANSKY, [1] *Lie Algebras and Locally Compact Groups*, Chicago-London: U. Chicago Press, 1971.

A. U. KLIMYK, [1] Decomposition of a tensor product of irreducible representations of a semisimple Lie algebra into a direct sum of irreducible representations, *Amer. Math. Soc. Translations*, Series 2, vol. 76, Providence: Amer. Math. Soc. 1968.

B. KOSTANT, [1] A formula for the multiplicity of a weight, *Trans. Amer. Math. Soc.* 93, 53–73 (1959).

[2] Groups over Z, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, *Proc. Symp. Pure Math.* IX, Providence: Amer. Math. Soc., 1966.

M. I. KRUSEMEYER, [1] Determining multiplicities of dominant weights in irreducible Lie algebra representations using a computer, *BIT* **11**, 310–316 (1971).

F. W. LEMIRE, [1] Existence of weight space decompositions for irreducible representations of simple Lie algebras, *Canad. Math. Bull.* **14**, 113–115 (1971).

R. D. POLLACK, [1] Introduction to Lie Algebras, notes by G. Edwards, Queen's Papers in Pure and Applied Math., No. 23, Kingston, Ont.: Queen's University, 1969.

H. SAMELSON, [1] *Notes on Lie Algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies No. 23, New York: Van Nostrand Reinhold, 1969.

R. D. SCHAFER, [1] *An Introduction to Nonassociative Algebras*, New York-London: Academic Press, 1966.

G. B. SELIGMAN, [1] *Modular Lie Algebras, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 40, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967.

[2] *Rational Methods in Lie Algebras*, New York-Basel: Marcel Dekker, 1976.

Séminaire "Sophus Lie", [1] *Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie*, Paris: École Norm. Sup., 1954–55.

J.-P. SERRE, [1] *Lie Algebras and Lie Groups*, New York: W. A. Benjamin, 1965.

[2] *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, New York: W. A. Benjamin, 1966.

N. N. SHAPOVALOV, [1] On a bilinear form on the universal enveloping algebra of a complex semisimple Lie algebra, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **6**, no. 4, 65–70 (1972) = *Functional Anal. Appl.* **6**, 307–312 (1972).

T. A. SPRINGER, [1] Weyl's character formula for algebraic groups, *Invent. Math.* **5**, 85–105 (1968).

R. STEINBERG, [1] A general Clebsch-Gordan theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* **67**, 406–407 (1961).

[2] Lectures on Chevalley groups, mimeographed lecture notes, New Haven, Conn.: Yale Univ. Math. Dept. 1968.

J. TITS, [1] Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No.* 31, 21–58 (1966).

V. S. VARADARAJAN, [1] *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974.

D.-N. VERMA, [1] Structure of certain induced representations of complex semi-simple Lie algebras, Yale Univ., dissertation, 1966; cf. *Bull Amer. Math. Soc.* 74, 160–166 (1968).

[2] Möbius inversion for the Bruhat ordering on a Weyl group, *Ann. Sci. École Norm. Sup. 4e série*, t.4, 393–398 (1971).

[3] Role of affine Weyl groups in the representation theory of algebraic Chevalley groups and their Lie algebras, pp. 653–705 in: *Lie Groups and their Representations*, ed. I. M. Gel'fand, New York: Halsted, 1975.

D. J. WINTER, [1] *Abstract Lie Algebras*, Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1972.

W. J. WONG, [1] Irreducible modular representations of finite Chevalley groups, *J. Algebra* **20**, 355–367 (1972).

# 符 号 索 引

# 译名对照及索引

一　画



二　画



三　画



四　画

七　画



八　画

## 九　画



## 十　画

* * * * *

[General Information]
书名=李代数及其表示理论导引
作者=（美）J.E.汉弗莱斯著　陈志杰译
页数=219
SS号=10457769
DX号=
出版日期=1981年08月第1版
出版社=上海科学技术出版社